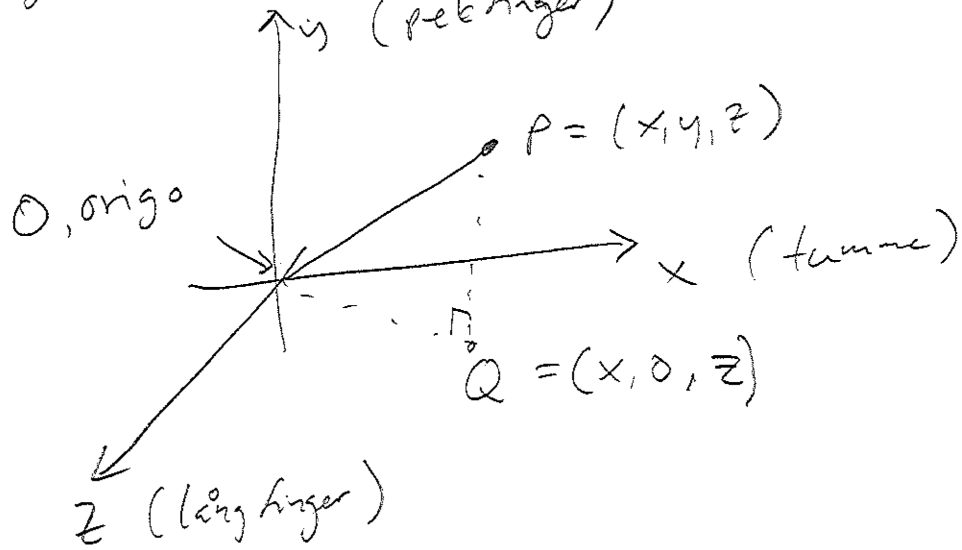
Idag

* Geometri i 3D
* Vektorer
* Skalär och Kryssprodukt

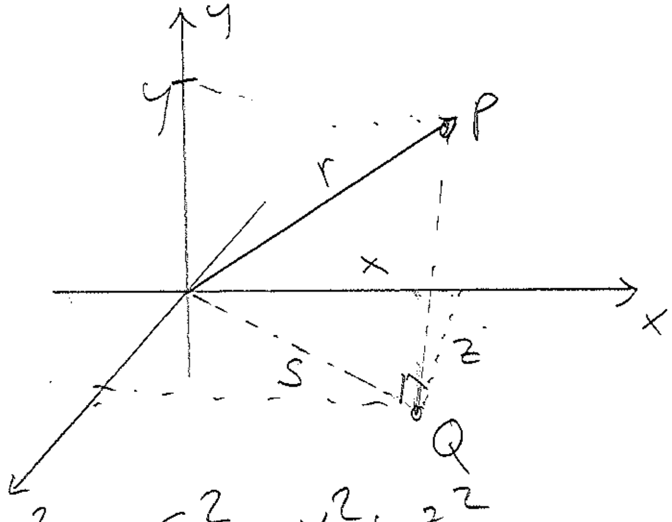
Kapitel 10.1-10.3

* Geometri i 3D

Höger orienterat koordinatsystem



Avståndet mellan O och P ges av att först beräkna avståndet mellan O och Q med Pythagoras sats och sedan O till P igen med Pythagoras



$$s^2 = x^2 + z^2$$

$$r^2 = y^2 + s^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

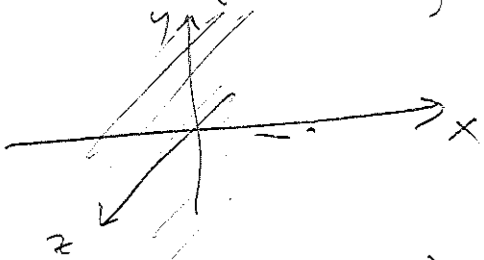
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Avståndet mellan två punkter i $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ges av

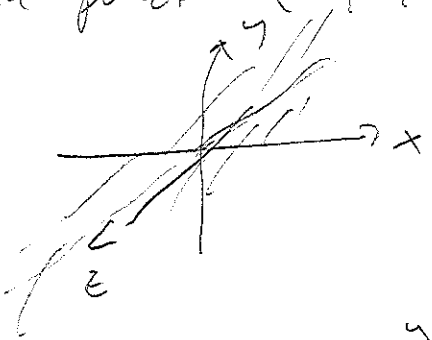
$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

* Ytor beskrivna av ekvationer

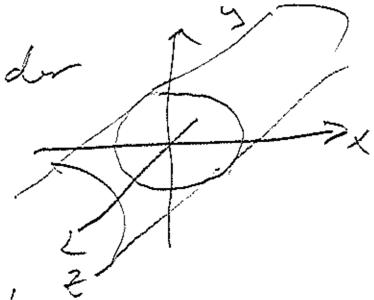
a) $x = 0$, alla punkter $(0, y, z)$, yz-planet



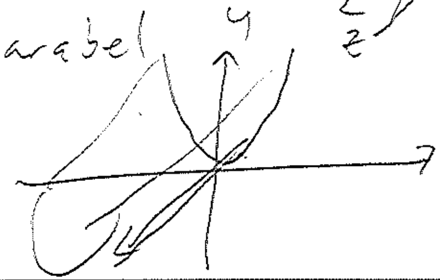
b) $x = y$, alla punkter (x, x, z) också plan



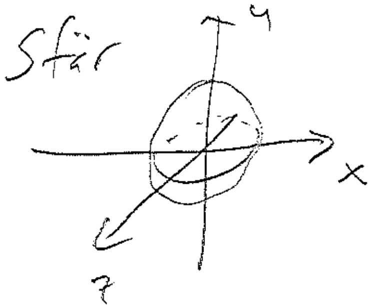
c) $x^2 + y^2 = 1$ cylinder



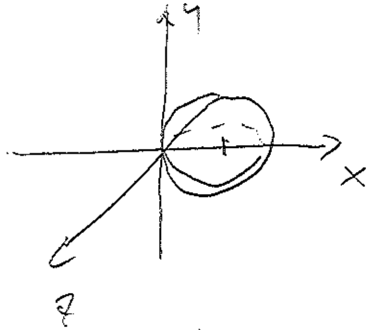
d) $y = x^2$ parabel



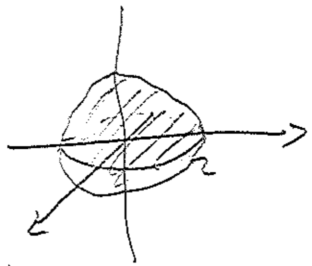
e) $x^2+y^2+z^2=1$ Sfär



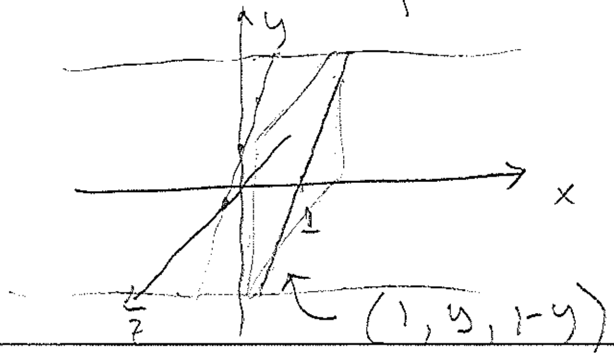
f) $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ förskjuten sfär



g) $x^2+y^2+z^2 \le 4$ klot



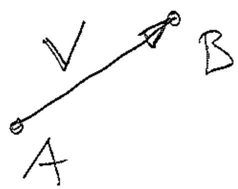
h) $\begin{cases} y+z=1 \\ x=1 \end{cases}$



* Vektorer

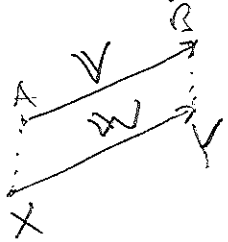
Vektorer har både storlek och riktning

Givet punkter A, B skriver vi vektorn $\mathbb{V} = \overrightarrow{AB}$



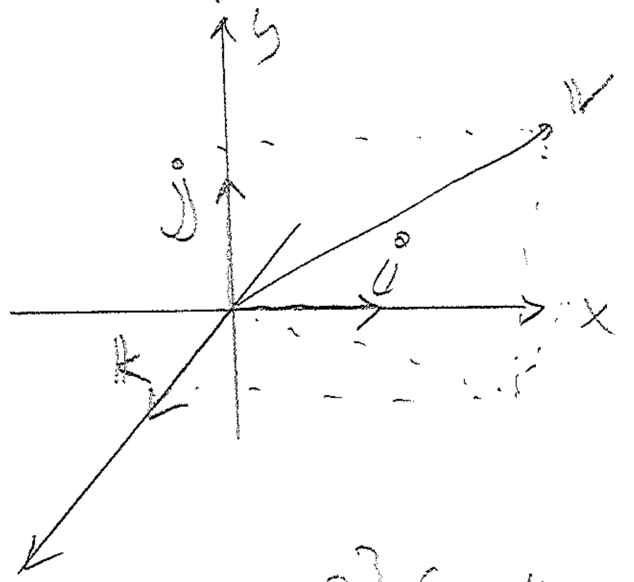
Längden av $\mathbb{V}$ skrivs $|\mathbb{V}|$ och är avståndet mellan A och B

Vektorer har i allmänhet inte position, $\mathbb{V}$ och $\mathbb{W}$ anses lika om de har samma riktning och längd



- Enhetsvektorer.

Vi låter $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ vara vektorer av längd 1 och riktning x-axeln, y-axeln respektive z-axeln



Alla vektorer i R^3 (3 dimensionella rummet) kan då skrivas som

$$\mathbb{v} = x\mathbb{i} + y\mathbb{j} + z\mathbb{k}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

eller kortare $\mathbb{v} = [x \;\; y \;\; z]$

Vi har att $|\mathbb{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

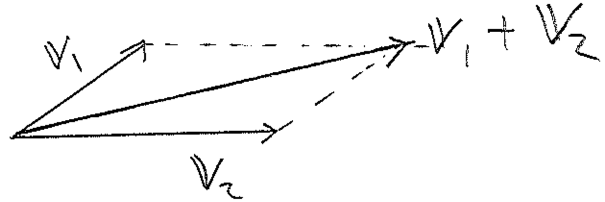
- Addition av vektorer

Låt $\mathbb{v}_1 = x_1\mathbb{i} + y_1\mathbb{j} + z_1\mathbb{k}$ och

$\mathbb{v}_2 = x_2\mathbb{i} + y_2\mathbb{j} + z_2\mathbb{k}$

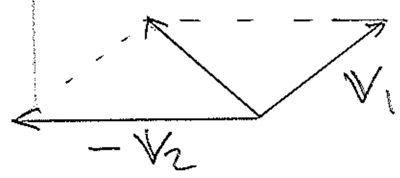
då gäller $\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2 = (x_1+x_2)\mathbb{i} + (y_1+y_2)\mathbb{j} + (z_1+z_2)\mathbb{k}$

Geometriskt har vi



- Subtraktion av vektorer

$\mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2 = (x_1-x_2)\mathbb{i} + (y_1-y_2)\mathbb{j} + (z_1-z_2)\mathbb{k}$



– Räknelagar:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

$$t(\mathbf{u}+\mathbf{v})=t\mathbf{u}+t\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-1)\mathbf{v}$$

Följer direkt genom att skriva

$$\mathbf{u}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k},\quad \mathbf{v}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}.$$

* Multiplikation av vektorer

– Skalärprodukt av två vektorer

Låt $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$,
$\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \quad \text{tal, skalär}$$

– Räkneregler

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$$

$$(t\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(t\mathbf{v})=t(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

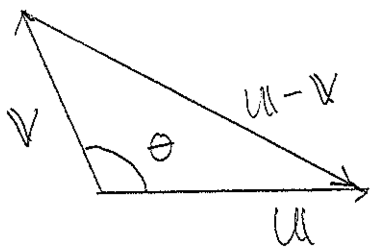
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2$$

Sats 10.1

Om $0\le\theta\le\pi$ är vinkeln mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ då gäller $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$

Speciellt gäller $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ vinkelräta.

<u>Bevis</u>



Cosinussatsen ger

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cos\theta$$

Å andra sidan

$$|\mathbb{u}-\mathbb{v}|^2 = (\mathbb{u}-\mathbb{v})\cdot(\mathbb{u}-\mathbb{v}) = \mathbb{u}\cdot(\mathbb{u}-\mathbb{v})$$

$$- \mathbb{v}\cdot(\mathbb{u}-\mathbb{v}) = \mathbb{u}\cdot\mathbb{u} - \mathbb{u}\cdot\mathbb{v} - \mathbb{v}\cdot\mathbb{u} + \mathbb{v}\cdot\mathbb{v}$$

$$= |\mathbb{u}|^2 + |\mathbb{v}|^2 - 2\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}$$

$$\Rightarrow |\mathbb{u}|^2 + |\mathbb{v}|^2 - 2\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = |\mathbb{u}|^2 + |\mathbb{v}|^2 - 2|\mathbb{u}|\cdot|\mathbb{v}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = |\mathbb{u}|\cdot|\mathbb{v}|\cos\theta \quad \blacksquare$$

- Kryssprodukt av två vektorer i $\mathbb{R}^3$

Låt $\mathbb{u} = u_1\mathbb{i} + u_2\mathbb{j} + u_3\mathbb{k}$,

$\mathbb{v} = v_1\mathbb{i} + v_2\mathbb{j} + v_3\mathbb{k}$

$$\mathbb{u}\times\mathbb{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbb{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbb{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbb{k}$$

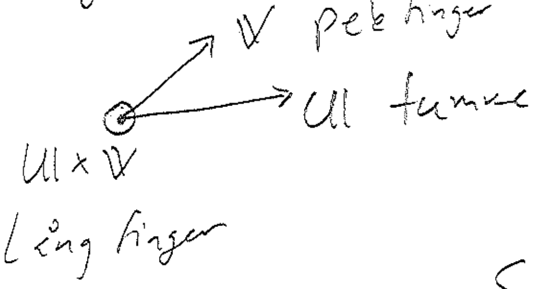
vektor

Denna produkt har följande egenskaper

(i) $\mathbb{u}\times\mathbb{v}$ är vinkelrät mot både $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$

(ii) Längden är given av $|\mathbb{u}\times\mathbb{v}| = |\mathbb{u}|\cdot|\mathbb{v}|\sin\theta$ där θ är vinkeln mellan $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$.

(iii) Riktningen följer ett högersystem



Bevis: Ingår ej, se Sats 10.2

- Räkneregler

$\mathbb{u}\times\mathbb{u} = 0$

$\mathbb{u}\times\mathbb{v} = -\mathbb{v}\times\mathbb{u}$

$(\mathbb{u}+\mathbb{v})\times\mathbb{w} = \mathbb{u}\times\mathbb{w} + \mathbb{v}\times\mathbb{w}$

$\mathbb{u}\times(\mathbb{v}+\mathbb{w}) = \mathbb{u}\times\mathbb{v} + \mathbb{u}\times\mathbb{w}$

$t\mathbb{u}\times\mathbb{v} = \mathbb{u}\times(t\mathbb{v}) = t\,\mathbb{u}\times\mathbb{v}$

$\mathbb{u}\cdot(\mathbb{u}\times\mathbb{v}) = \mathbb{v}\cdot(\mathbb{u}\times\mathbb{v}) = 0$