Idag:

* Matris notation
* System av lin ordningens ODE
* Högre ordnings ODE som system av första ordningens ODE
* Tillämpningar

Anteckningar

* Matris notation

Vi studerar n linjära ekvationer med n obekanta

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Detta kan skrivas på matrisform

$$
A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{(n\times n)} \quad x = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{(n\times 1)} \quad b = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{(n\times 1)}
$$

$$Ax = b$$

vektorer

* Matris-vektor multiplikation

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Produkten ges av skalärprodukten mellan raderna i A och kolumnvektorn X,

$$[a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

* System av linjära ODE

Låt $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ och $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \ldots n$

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t)$$

Varje ekvation har ett begynnelsevillkor

$$x_1(0) = c_1, \ x_2(0) = c_2, \ \ldots, \ x_n(0) = c_n$$

Vi kan uttrycka detta med vektorer och matriser. Låt

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{x}}(t) = \mathbb{A}(t)\,\mathbb{x}(t) + \mathbb{b}(t) \\ \mathbb{x}(0) = \mathbb{c} \end{cases}$$

Ex:
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t), & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Låt $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad \dot{\mathbb{x}} = \mathbb{A}\mathbb{x}$, $\mathbb{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

* Lösning med substitution

Vi använder samma exempel

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t), & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Sätt in $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ i andra ekvationen

$\ddot{x}_1(t) = -x_1(t)$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 1$

$\Rightarrow \ddot{x}_1(t) + x_1(t) = 0$

Karaktäristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow r_{1,2} = \pm i$

Lösning ges av $x_1(t) = A\cos t + B\sin t$

$x_1(0) = A = 0 \quad \dot{x}_1(t) = B\cos t \Rightarrow$

$\dot{x}_1(0) = B = 1 \Rightarrow x_1(t) = \sin t$.

$x_2(t) = \cos t$

* Allmänna system av lin. ordn. ODE

Låt $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, och $\mathbb{F}(t, y) \in \mathbb{R}^n$

Vi studerar

$$\begin{cases} \dot{y} = \mathbb{F}(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

<u>Ex:</u>

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + y_1 y_2 \\ \dot{y}_2 = t \cdot y_2 - y_1 y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F}(t, y) = \begin{bmatrix} -y_1 + y_1 y_2 \\ t y_2 - y_1 y_2 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Denna typ av problem löses numeriskt.

<u>Sats:</u> Existens och entydighet av lösning

Om $\mathbb{F}(t, y)$ uppfyller

$$|\mathbb{F}(t, y_1) - \mathbb{F}(t, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

för alla $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, där K är en konstant (Lipschitz kontinuitet)

så finns entydig lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dot{y} = \mathbb{F}(t, y) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

i en omgivning till y_0 för $t < \delta$, något δ

* Högre ordnings ODE som system av första ordningen

Vid numerisk lösning av ODE är det lättare att hantera system av första ordningens ODE.

Vi studerar $y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(1)}, y, t)$

$y(0) = c_0,\ y^{(1)}(0) = c_1,\ y^{(2)}(0) = c_2$

$\dots\ y^{(n-1)}(0) = c_n$

Låt $y_1 = y$

$y_2 = y^{(1)}$

$\vdots$

$y_{i+1} = y^{(i)}$

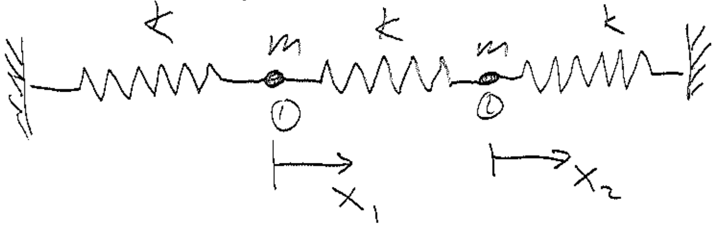
$\vdots$

$y_n = y^{(n-1)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = F(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1, t) \end{cases}$$

Vi kan alltså skriva om differentialekvationer på formen $y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \dots, y^{(1)}, y, t)$ som system av första ordningens ODE.

* Tillämpningar: Massor och fjädrar



Vi har $F = kx$ där x är avvikelsen från fjäderns jämviktsläge

k fjäderkonstant,

F kraft.

$$m\ddot{x}_1 = F = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = F = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

Om $x_2 > x_1 \Rightarrow$ positiv kraft på ① och negativ på ②.

Låt nu $x_3 = \dot{x}_1$ och $x_4 = \dot{x}_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k/m & k/m & 0 & 0 \\ k/m & -2k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbb{X}} = \mathbb{A}\mathbb{X}, \quad \mathbb{X}(0) = \mathbb{X}_0$$

I Matlab löses detta med

```
[t,x]=ode45(@funk,[0 T],[0 0 1 -1]);
function xprim = funk(t,x)
  xprim = A*x;
```

ode45, ode23,... fungerar bara på system av första ordningen, ej högre ordning. Därför måste högre ordnings ekvationer skrivas om enligt ovan.