Idag:

* Numeriska metoder för att lösa ODE.
* Feluppskattning
* System
* Randvärdesproblem

* Numeriska metoder för ODE

Låt $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Låt $x_i = x_0 + i \cdot \underset{\uparrow\,\text{Steglängd}}{h}, \quad i = 0, \dots, n$

Vi låter den numeriska approximationen vara $y_i \approx y(x_i)$

Framåt Euler

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)}$$

Bakåt Euler

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})}$$

Notera att här behöver en ekvation lösas för att beräkna y_{i+1}. En sådan metod kallas Implicit. Detta är inte fallet för Framåt Euler som är Explicit.

Mittpunktsmetoden

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)}$$

Detta är också en implicit metod eftersom y_{i+1} ingår i högerledet.

Ex: $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

$y(0) = 1$

Lös med Bakåt Euler i $[0,1]$ med konstant steglängd $h = 0{,}2$

$x_j = \frac{j}{5}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$, $h = \frac{1}{5}$

$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{5}\left(\frac{j+1}{5} - y_{j+1}\right) \Rightarrow$

$y_{j+1} = \frac{5}{6} y_j + \frac{j+1}{30}$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$y_0 = 1$

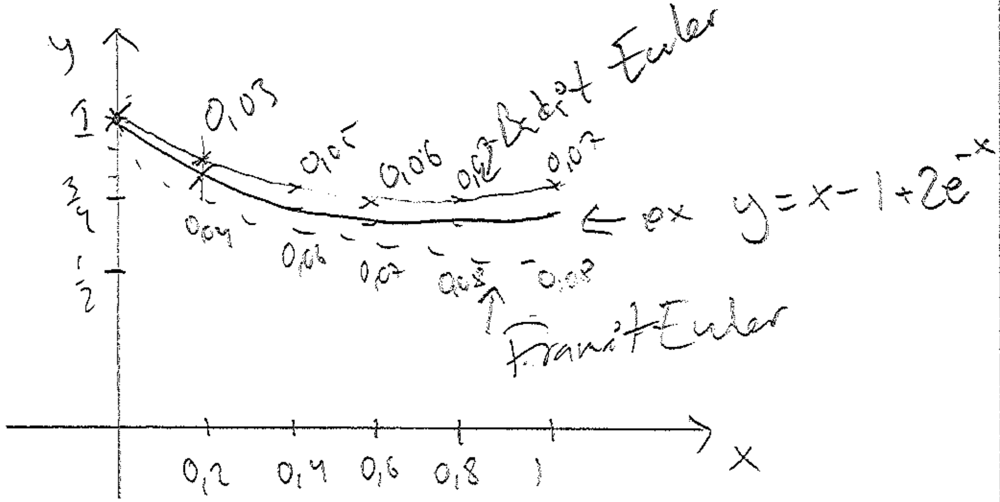
$y_1 = \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{1}{30} = \frac{13}{15} = 0,8667\ldots$

$y_2 = \frac{5}{6} y_1 + \frac{1}{15} = 0,7889\ldots$

$y_3 = 0,7574$

$y_4 = 0,7645$

$y_5 = 0,8038$



Sats (fel i approximationen)

Låt $f(x,y)$ vara Lipschitz kontinuerlig i y och studera begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Låt y_n vara Framåt Eulerapproximationen av $y(x_n)$ och $x_n = n \cdot h$, $n = 0,1,2,\ldots$, $h > 0$ steglängd. Då gäller

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{h \cdot M}{2L}\left(e^{L(x_n - x_0)} - 1\right)$$

där L är f:s Lipschitz konstant (map y) och M en begränsning av andra derivatan av y med avseende på x.

Bevis ingår ej.

Eftersom $|y(x_n) - y_n| \sim h$
↑
proportionellt mot

Säger vi att Framåt Euler har första ordningens konvergens

Bakåt Euler är också första ordningen medan mittpunkt är andra ordningen, $|y(x_n) - y_n| \sim h^2$.

* System av ODE

Vi låter nu $y(x) \in \mathbb{R}^n$, $x > x_0$

$f(x,y) \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$

och studerar

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dot{y}_2 &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \dot{y}_3 &= f_3(\ldots) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= f_n(x, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Kom ihåg, högre ordnings ODE kan skrivas som system av först ordnings ODE.

Samma algoritmer som i det skalära $(n=1)$ fallet fungerar

Framåt Euler (explicit)

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)}$$

Bakåt Euler (implicit)

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})}$$

Mittpunktsmetoden (implicit)

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)}$$

Notera att de implicita metoderna kräver lösning av vektorvärd algebraisk ekvation.

Sats: Om samtliga andraderivator av f med avseende på y_j är kontinuerliga, $\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j}$ kont och f är Lipschitz kontinuerlig m.a.p. y, $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$ (längd i $\mathbb{R}^n$)

Så gäller att:

Framåt och Bakåt Euler har fel $|y(x_n) - y_n| \leq C \cdot h$

Mittpunktsmetoden $|y(x_n) - y_n| \leq C h^2$.

* Randvärdesproblem

Värmeledning i en endimensionell stav bestäms av Poisson's ekvation

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{du}{dx}\right) = q(x), & 0<x<L \\ u(0) = u(L) = 0 & \text{, där} \end{cases}$$

u är temperaturen, k värmeledningskoefficienten och q värmetillförsel.

Vi låter $u_1 = u$, $u_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$ vilket ger ett första ordningens system

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = u_2 & u_1(0) = 0 \quad \Big| \quad u_1(L) = 0 \\ \dfrac{du_2}{dx} = -\dfrac{q}{k} & u_2(0) = \;? \end{cases}$$

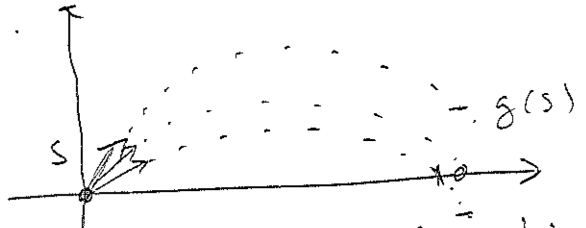
Inskjutning.

Eftersom vi inte vet $u_2(c)$ kan vi inte direkt använda våra ODE lösare.

Vi gissar då på ett värde $u_2(c) = s$.

Och så betecknar vi $u_1(L) = g(s)$ ↑ för någon funktion g

Sedan söker vi lösningen av $g(s) = 0$.



Varje evaluering av g innebär att vi löser en ODE. g är kontinuerlig, bisektion eller Newton-Raphson ger lösning

* Sammanfattning System av ODE
* Högre ord som system av första
* Existens entydighet
* Numeriska metoder

* Randvärdesproblem