

Idag:

* Definition av
funktioner som lösningar
till differentialekvationer

* e^x , $\log x$

* $\sin x$, $\cos x$

Anteckningar

Givet $F(t, y) \in \mathbb{R}^n$ Lipschitz
kontinuerlig har begynnelsevärdes-
problemet

$$\begin{cases} \dot{y} = F(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

en tydlig lösning.

Många elementära funktioner, e^x
 $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, ...
är lösningar till vanligt förekommande
(enkla) differentialekvationer.

Man kan därför definiera dem som lösningar
till ODE.

* e^x

Definitionen $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2.71828\dots$

Säger inte mycket om varför e^x är en så vanligt förekommande funktion inom vetenskapen.

Alternativ definition: e^{kx} är den enbetydiga lösningen till ODE:n

$$\begin{cases} y'(x) = ky(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

"Förändringen är proportionell mot populationen!"

Givet denna definition får vi med $y_1 = e^{k_1 x}$ och $y_2 = e^{k_2 x}$ att $y_3 = y_1 \cdot y_2$ löser,

$$\begin{aligned} y_3'(x) &= (y_1(x)y_2(x))' = y_1'(x)y_2(x) \\ &+ y_1(x)y_2'(x) = (k_1 + k_2)y_1(x)y_2(x) \\ &= (k_1 + k_2)y_3(x) \text{ samt} \end{aligned}$$

$$y_3(0) = y_1(0) \cdot y_2(0) = 1 \text{ alltså}$$

$$y_3(x) = e^{(k_1 + k_2)x}$$

Trivialt gäller $\frac{d}{dx} e^{kx} = \frac{d}{dx} y(x) = ky(x) = ke^{kx}$.

* Inversen till e^x .

Låt $k=1$. Vi vill definiera en funktion $v(y)=x$, där $y=e^x$, alltså inversen till exponential fun.

Den som med avseende på x :

$$1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} v(y(x)) = v'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= v'(y) \cdot y \Rightarrow v'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$v(y) = \int_{y(0)=1}^y \frac{1}{z} dz = \int_1^y \frac{1}{z} dz$$

Vi definierar detta som $v(y) = \log y$,

$$\log y = \int_1^y \frac{1}{z} dz \quad (\text{Stämmer med tidigare definition})$$

* Härledning av formeln för e .

Vi vill beräkna $y(1)$ där,

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Vi delar in $(0,1)$ i n delintervall och använder framåt Euler

$$y^n - y^{n-1} = y^{n-1} \Rightarrow y^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) y^{n-1} =$$

$$= \dots = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n y^0 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Vi låter nu $n \rightarrow \infty$. Vi vet att framåt Euler konvergerar mot $y(1)$

$$\text{alltså } y(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

* Definition av e^{-x}

Vi definierar $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$$\frac{d}{dx} e^{-x} = \frac{d}{dx} \frac{1}{e^x} = - \frac{\frac{d}{dx} e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$$

alltså löser e^{-x}

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

* a^x för godtyckligt a .

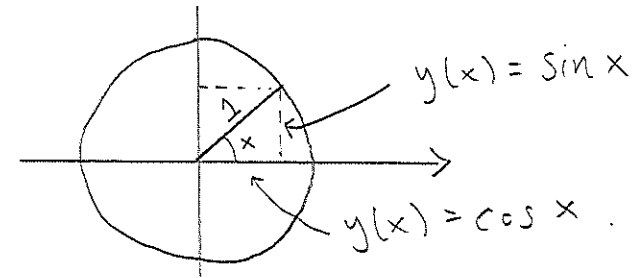
Låt $a^x = e^{x \log a} \Rightarrow$ lösning till

$$\begin{cases} y'(x) = \log a \cdot y(x), & x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Vi har $a^x \cdot a^y = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = e^{(x+y) \log a} = a^{x+y}$

* $\sin x, \cos x$

Traditionell definition:



Alternativ definition för $\sin x$:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, & x > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Entydig lösning existerar.

Vi deriverar: $y'''(x) + y'(x) = 0 \Rightarrow$

$z(x) = y'(x)$ löser $z''(x) + z(x) = 0$
 $z(0) = y'(0) = 1$

$z'(0) = y''(0) = -y(0) = 0$

Vi låter detta definiera $\cos x := z(x)$

* Härledning av traditionell definition av $\sin x$

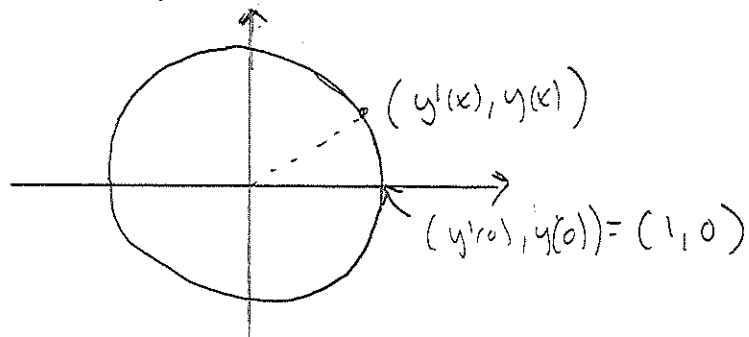
Vi noterar att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (y')^2 + y^2 &= 2y' \cdot y'' + 2y \cdot y' = \\ &= 2y' (y'' + y) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$(y')^2 + y^2 = \text{konstant}$. Vidare

$$y'(0)^2 + y^2(0) = 1 \Rightarrow$$

$$(y'(x))^2 + y(x)^2 = 1$$



x ger en parametrisering av kurvan $(y'(x), y(x))$. En punkt rör sig konstant längs kurvan moturs när x ökar. Hastigheten ges av

$$\frac{d}{dx} (y'(x), y(x)) = (y''(x), y'(x)) = (-y(x), y'(x))$$

och farten är $\sqrt{y'(x)^2 + (-y(x))^2} = 1$

Alltså hinner vi ett varv då x går från 0 till 2π (cirkelns omkrets)
 $y(x) = y(x + 2\pi) = y(x + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

Detta innebär att den traditionella definitionen är uppfylld, $y(x) = \sin x$

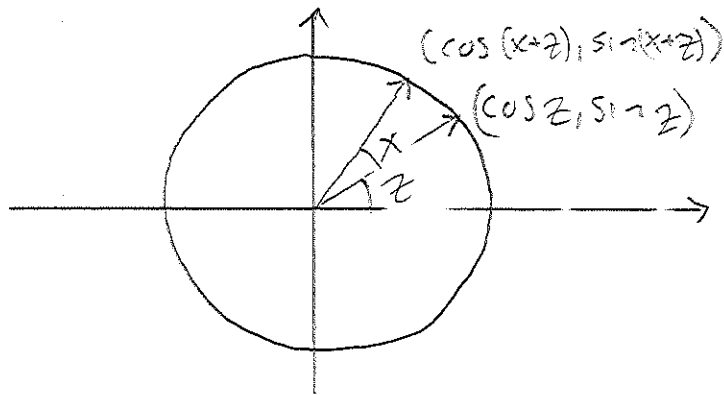
* Trigonometriska räkneregler

Vi har direkt $y(x)^2 + y'(x)^2 = 1 \Rightarrow$
 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Vidare låt $y''(x) + y(x) = 0$
 $y(0) = \alpha$
 $y'(0) = \beta$

Linearitet $\Rightarrow y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$
 (testa lösningen)

Låt nu $\alpha = \sin z$ och $\beta = \cos z$



Vi har att $y(x) = \sin(x+z)$ Läser

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = \sin z \\ y'(0) = \cos z \end{cases}$$

Lösningen är entydig. Men vi kan ju
 redan att $\alpha \cos x + \beta \sin x = \sin z \cos x + \cos z \sin x$
 Löser samma ekvation, alltså
 $\sin(x+z) = \sin z \cos x + \cos z \sin x.$

Motsvarande relation för
 cos fås genom derivering

$$\cos(x+z) = \frac{d}{dx} \sin(x+z) = \frac{d}{dx} \sin z \cos x$$

$$+ \frac{d}{dx} \cos z \sin x = -\sin z \sin x + \cos z \cos x$$

$$= \cos x \cdot \cos z - \sin x \cdot \sin z$$

Ur dessa följer direkt

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x, \text{ lät } z=x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \text{ lät } z=x$$

* Sammanfattning

* Definiera e^x , $\sin x$, $\cos x$ som

Lösningar till ODE

* Definiera $\log x$ som invers till e^x

⇒ Härled traditionella definitioner
utifrån de nya

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \log x = \int_1^x \frac{1}{y} dy,$$

