Idag: * Laplace transform, tillämpning av generaliserade integraler

* Laplace transformens egenskaper
* Tabell med Laplace transformer

Anteckningar

* Laplace transform

Laplace transformen är en integral transform med tillämpningar tex inom elektriska nät.

Låt $f(t)$ vara en funktion av tiden $t \geq 0$ sådan att

$|f(t)| \leq Ce^{at}$ för några $C, a \geq 0$.

Vi begränsar alltså hur fort f får växa då $t \to \infty$.

Vi definierar Laplace transformen

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad , s \in \mathbb{C}$$

Laplace transformen är väldefinierad

för s sådan att $\operatorname{Re}(s) > a$

eftersom med $s = x + iy$, $x > a$

gäller $|F(s)| \le \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \right| \le$

$$\le \int_0^\infty |e^{-t(x+iy)} f(t)|\,dt \le$$

$$\le \int_0^\infty |e^{-tx}| \cdot |e^{-ity}| \cdot |f(t)|\,dt \le$$

$$\le \int_0^\infty |e^{-tx}| \cdot 1 \cdot C e^{at}\,dt =$$

$$= C \int_0^\infty e^{-t(x-a)}\,dt = \frac{-C}{x-a}\left[e^{-t(x-a)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{C}{x-a} < \infty .$$

Ex: Låt $f(t) = e^t$. $f(t)$ uppfyller kravet med $C = 1$, $a = 1$, Låt $\operatorname{Re} s > 1$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^t\,dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t}\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{1-s} e^{(1-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-1}$$

eftersom $s = x + iy$, $x > 1$: $|e^{(1-s)t}| = |e^{-iyt}| \cdot |e^{(1-x)t}| =$

$$= |e^{(1-x)t}| \to 0 \quad t \to \infty .$$

Ex: Låt $f(t) = 1$, $t > 0$

$f(t)$ uppfyller kravet med $C = 1$, $a = 0$

Låt nu $\operatorname{Re} s > 0$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Eftersom $|e^{-st}| = |e^{-iyt}| \cdot |e^{-xt}| =$

$= |e^{-xt}| \to 0$ då $t \to \infty$

Ofta används Heaviside funktionen

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

För att beskriva en signal som tex slås på.

En annan speciell funktion är $\delta(t)$ dirac-delta som är derivatan av $\theta(t)$, $\delta(t) = \theta'(t)$

Detta är en generaliserad funktion

$\delta(t) = 0$, $t \neq 0$, $\int_{0^-}^{\infty} \delta(t) g(t)\, dt =$

$$= \int_{0^-}^{\infty} \theta'(t) g(t)\, dt = \left[\theta(t) g(t)\right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} \theta(t) g'(t)\, dt$$

$$= \{\text{Antag } g(t) \to 0,\ t \to \infty\} = -\int_0^{\infty} g'(t)\, dt$$

$$= g(0).$$

<u>Ex</u>: Låt $f(t) = \delta(t)$ (impuls)

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt = 1$$

* Skalning

Givet en funktion $f(t)$ med Laplace transform $F(s)$ och ett tal $a > 0$ bildar vi $g(t) = f(at)$ då ges G:s Laplace transform av

$$G(s)=\int_0^\infty f(at)e^{-st}dt=\left\{\begin{matrix}\tau=at\\ d\tau=a\,dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}d\tau=\frac{1}{a}F(s/a)$$

Ex:

Låt $f(t)=e^t$. Vi vet $F(s)=\frac{1}{s-1}$. Då gäller för $g=e^{at}$ att $G(s)=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

$$=\frac{1}{a}\frac{1}{\frac{s}{a}-1}=\frac{1}{s-a}$$

* Exponentiell skalning

Låt nu $g(t)=e^{at}f(t)$

Då gäller $G(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt=$

$$=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=F(s-a)$$

Ex: Låt $f(t)=1$. Vi vet $F(s)=\frac{1}{s}$

Då gäller $g(t)=e^{at}\cdot 1$ att

$$G(s)=F(s-a)=\frac{1}{s-a}.$$

* Fördröjning

Låt $g(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<T\\ f(t-T), & T\le t\end{cases}$

$\tau=t-T$

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt=\int_T^\infty e^{-st}f(t-T)dt=\int_0^\infty e^{-s(\tau+T)}f(\tau)d\tau$$

$$=e^{-sT}F(s)$$

* Entydighet

Om F är Laplace transformen av f och G är Laplace transformen av g så gäller $F=G \iff f=g$.

* Notation och egenskaper

En alternativ notation till $F(s)$ är $\mathcal{L}(f(t))(s)$

Laplacetransformen är linjär:

givet $a, b \in \mathbb{R}$, f, g s.a. $|f| \leq Ce^{at}$, $|g| \leq Ce^{at}$ gäller

$$\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = \int_0^\infty e^{-st}(af(t)+bg(t))\,dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt$$

$$= a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t)).$$

Ex: $\mathcal{L}(3\delta(t)+e^t) = 3 + \frac{1}{s-1}$

* Invers Laplace transform

Givet $F(s)$ definierad för $\mathrm{Re}\, s \geq a$ gäller

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)\,e^{(a+i\omega)t}\,d\omega$$

Denna formel används sällan i praktiken.

Istället används Laplacetransform för att beräkna tabeller. Eftersom den är entydig ger detta även resultatet av invers Laplace-transform

* Tabell

$f(t)$	$F(s)$
$f(t)$	$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$\delta(t)$	1
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Ex: Låt $f(t) = \sin t$

Vi har $e^{it} = \cos t + i\sin t$ och

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i\sin t$$

$$\Rightarrow \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt = \int_0^t e^{-st}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\,dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{(i-s)t} - e^{-(i+s)t}\,dt = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-s}e^{(i-s)t} + \frac{1}{i+s}e^{-(i+s)t}\right]_0^\infty = \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(s)>0 \\ \underbrace{e^{-\mathrm{Re}\,s\,t}}_{\substack{\to 0 \\ t\to\infty}} \cdot e^{-i(1+\mathrm{Im}\,s)t} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{s+i-(s-i)}{(s-i)(s+i)}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{2i}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}.$$