Idag: * Sammanfattning av kursen, ej heltäckande

Kapitel 5, 6, 7, 10, 18

System av ODE, Laplace transform

* Summor och integralen

Sats 5.1

b) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}, \quad r \neq 1$

Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$,

Undre Riemannsumman: $L(f,n) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$

Övre Riemannsumman: $U(f,n) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $l_i, u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sådana att

$\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(l_i)$ $\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(u_i)$

Om det finns endast ett $I \in \mathbb{R}$ så att

$L(f,n) \leq I \leq U(f,n)$ för alla n

Vi låter $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Sats 5,4</u> Medelvärdessatsen för integraler

Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$.

Då finns en punkt $c \in [a,b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

<u>Sats 5,5</u> Analysens fundamentalsats

Låt f vara kontinuerlig på ett intervall J innehållande punkt $a \in J$. Låt

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, då är F deriverbar på J

och $F'(x) = f(x)$. F är då primitiv till f på J.

* Integrations tekniker

<u>Sats 5,6</u> Substitution

Låt g vara deriverbar i $[a,b]$ med $g(a) = A$, $g(b) = B$ och att f är kontinuerlig på $[a,b]$. Då är $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$

Partiell integration:

$$\int_a^b U(x)\frac{dV}{dx}\,dx = \Big[U(x)V(x)\Big]_a^b - \int_a^b V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

* Generaliserad integral

$I = \int_a^b f(x)\,dx$, (i) $a = -\infty$, $b = \infty$ (ii) f obegränsad

Om $I = \pm\infty$ divergent annars konvergent

<u>Sats 6.2</u> p-integraler, $0 < a < \infty$

$$\text{(i)} \int_a^\infty x^{-p}\,dx = \begin{cases} \text{konvergerar } \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \\ \text{divergerar } \infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

(ii) $\int_0^a x^{-p}\,dx = \begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p<1 \\ \text{divergerar } \infty, & p \geq 1 \end{cases}$

* Numerisk integration

Trapetsregeln: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$(x_i, y_i) = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

där $h = x_i - x_{i-1}$ konstant.

<u>Sats 6.4</u>: $\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$,

K begränsning av f'' på $[a,b]$.

---

* Rotationsvolymer

1) $f(x)$ roterar runt x-axeln

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

2) $f(x)$ roterar runt y-axeln

$$V = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$$

* Båglängder

Låt $f(x)$ vara definierad på $[a,b]$

Längden av grafen $\{(x, f(x)),\ a \leq x \leq b\}$ ges av $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

* Masscentrum

Låt $\sigma(x)$ vara densiteten, $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$,

Momentet: $M_{x=0} = \int_a^b x\sigma(x) f(x)\,dx$

$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) f(x)^2\,dx$

Massan: $m = \int_a^b \sigma(x) f(x)\,dx$

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}$$

* Centroider

Masscentrum då $\sigma(x) = 1$.

Sats 7.1 Centroiden av en triangel är punkten där medianerna står varandra.

Sats 7.2 Pappus sats

Om ett område R roterar runt L ges $V = 2\pi\bar{r}\cdot A$, där A är arean av R och $\bar{r}$ är kortaste avståndet mellan R:s centroid och L.

* Ordinära differentialekvationer $\overset{\text{:a}}{\text{ordningen}}$

Sats 18.1 Om y_1 och y_2 är lösningar till samma linjära homogena ODE

$$(*)\quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y = 0$$

Så är även $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ lösning.

Sats 18.2 Om y_1 löser $(*)$ och y_2 löser $(**)$ $a_n(x)y_2^{(n)} + \dots + a_0(x)y_2 = f(x)$ så löser även $y = y_1 + y_2$ $(**)$.

* Separabel ODE

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

* Integrerande faktor

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow y(x) = e^{-P(x)}\int e^{P(x)}q(x)\,dx$$

där $P(x)$ är primitiv till $p(x)$.

Sats 18.3 Existens och entydighet

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\quad y(x_0) = y_0$$

Om f och $\frac{\partial}{\partial y} f$ är kontinuerliga för $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ innehållande punkten (x_0, y_0). Då finns $\delta > 0$ så att det finns entydig lösning $y(x)$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

---

* ODE andra ordningen

Allmänna formen $F(y'', y', y, x) = 0$

Om $F(y'', y', x) = 0$ Låt $v = y'$ Lös

$F(v', v, x) = 0$ 1:a ordningen

Om $F(y'', y', y) = 0$ Låt $v = y'$ $\Rightarrow$

$y'' = v \frac{dv}{dy} \Rightarrow F(v \frac{dv}{dy}, v, y) = 0$

* Linjära 2:a ordningens ODE med konstanta koefficienter

$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

där r_1 och r_2 är rötter till $ar^2 + br + c = 0$

om $r_1 = r_2 \Rightarrow y = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$

* Eulers ekvation

$a x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + b x \frac{dy}{dx} + cy = 0$, ansätt $y = x^r$.

* Vektorer och matriser

<u>Sats 10.1</u> Om $0 \le \theta \le \pi$ är vinkeln mellan två vektorer u och v då gäller

$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos \theta$.

Matrisnotation och linjära ekv. sys med 2,3 obekanta

---

* Definition av e^x, $\lg x$, $\sin x$, $\cos x$ m.hj.a. differentialekvationer.

Härleda standard definitionerna från de nya.

* System av ODE

Sats $\dot{y} = \mathbb{F}(t, y)$, $y(0) = y_0$ har entydig lösning om $\mathbb{F}$ är Lipschitz kontinuerlig i y.

* Högre ordningens ODE som system av 1:a ordningen

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(1)}, y, t)$$

$\Rightarrow y_1 = y,\ y_2 = y^{(1)}, \dots \Rightarrow$ system av 1:a ordningen

* Numeriska metoder

Framåt Euler $y^{n+1} = y^n + h\mathbb{F}(t^n, y^n)$

Bakåt Euler $y^{n+1} = y^n + h\mathbb{F}(t^{n+1}, y^{n+1})$

Feluppskattning $|y(x_n) - y_n| \sim \frac{1}{n}$

* Laplace transform

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \quad |f(t)| \le Ce^{at}$$

Beräkna transform av vissa funktioner

$f(t)$	$F(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$\delta(t)$	1
$\theta(t)$	$1/s$
$f'(t)$	$sF(s) - sf(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)\cdot G(s)$

* Lösa ODE med Laplace-transform.

Axel Målqvist axel@chalmers.se