TMV 151

(1)

* **Idag**: Simulering av mekaniska system

$\boxed{F18}$

- Lösning av $u' = f$
- Omskrivning av mekaniska system på formen $u' = f$
- Implementation / exempel

---

* Lösning av $u' = f$

Ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t), t), & 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$u_0, u(t) \in \mathbb{R}^N$

f Lipschitz-kontinuerlig i u och kontinuerlig i t

$\Rightarrow$ Lösning existerar (åtminstone för $0 < t < \varepsilon$)

Notera: f kan vara ickelinjär!

Lösningen ges av integralen

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s), s)\, ds$$

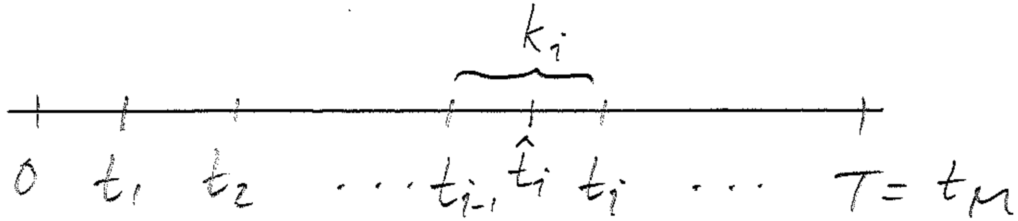
Kontroll:

$$u(0) = u_0 + \int_0^0 = u_0 + 0 = u_0$$

$$u'(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} u_0}_{=0} + \frac{d}{dt}\int_0^t f = f(u(t), t)$$

OK!

Numerisk lösning: Approximera integralen på korta tidsintervall:



$$u(t_i) = u(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(u(s), s)\, ds$$

Approximation

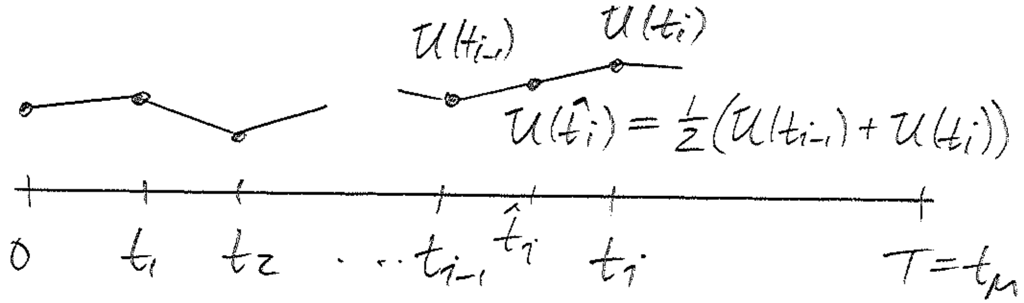
$$\approx u(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(u(\hat{t}_i), \hat{t}_i)\, ds$$

$$= u(t_{i-1}) + k_i \cdot f(u(\hat{t}_i), \hat{t}_i)$$

Vi definierar den numeriska lösningen $U \approx u$ enligt

$$\boxed{\begin{cases} U(t_i) = U(t_{i-1}) + k_i \cdot f(U(\hat{t}_i), \hat{t}_i), & i = 1, 2, \dots, M \\ U(0) = u_0 \end{cases}}$$

Mellan tidpunkterna t_{i-1}, t_i definierar vi U som den linjära interpolanten:



Denna metod kallas omväxlande

- mittpunktsmetoden
- Crank–Nicolson
- cG(1)

Viktig egenskap: Bevarar energin i ett mekaniskt (Hamiltonskt) system.

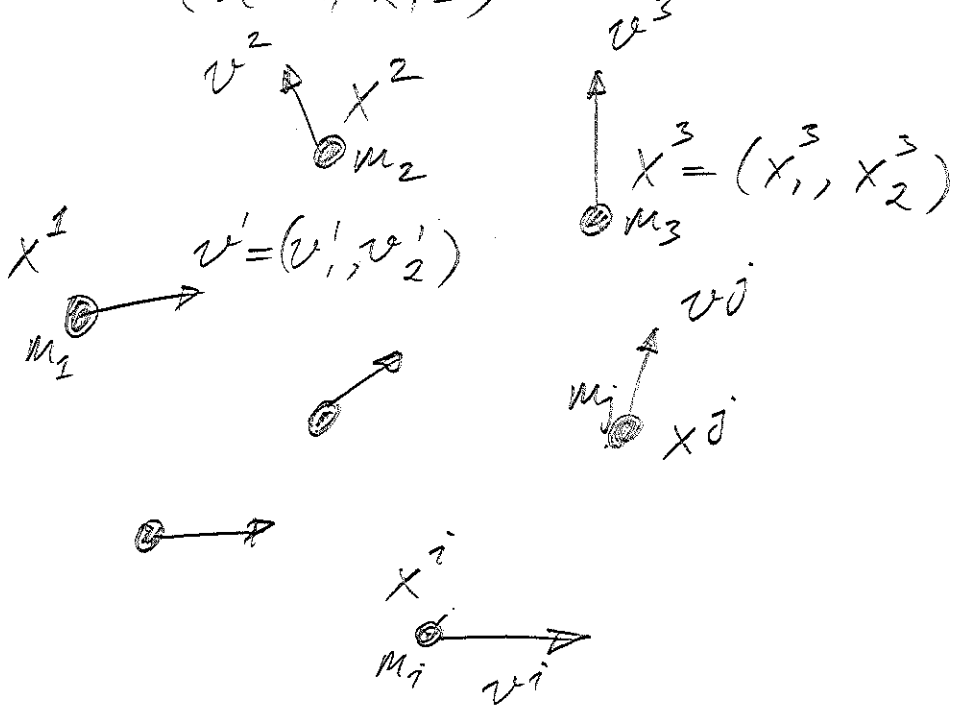
* Omskrivning av mekaniska system

Beskrivs av ekvationen

$$\boxed{F = ma}$$

(Newtons 2:a lag)

<u>Notera:</u> $F = F(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^d$
$(d = 1, 2, 3)$



(Här illustrerat för $d = 2$)

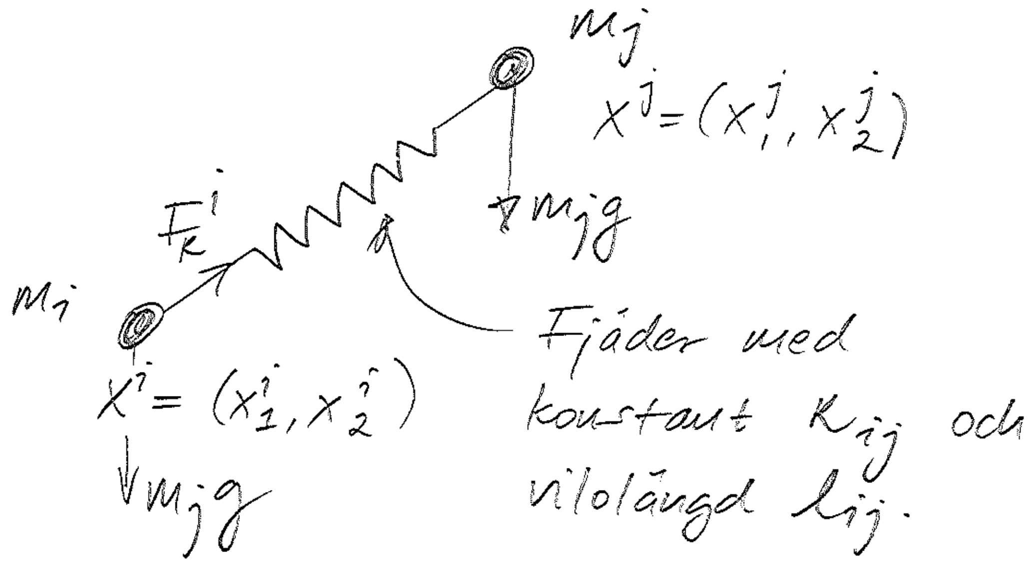
System av n st partiklar.
Partikel i har massa $m_i \in \mathbb{R}$
position $x^i \in \mathbb{R}^d$
hastighet $v^i \in \mathbb{R}^d$
och påverkas av kraft $F^i \in \mathbb{R}^d$

Låt nu $u = u(t) \in \mathbb{R}^N$, $\underline{N = 2dn}$.

$$u = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_3^n \\ \hline v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_3^n \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{positioner} \\ \\ \\ \text{hastigheter} \end{matrix} \Longrightarrow \dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \\ \dot{x}_3^1 \\ \dot{x}_1^2 \\ \vdots \\ \dot{x}_3^n \\ \hline \dot{v}_1^1 \\ \dot{v}_2^1 \\ \dot{v}_3^1 \\ \dot{v}_1^2 \\ \vdots \\ \dot{v}_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_3^n \\ \hline \ddot{x}_1^1 \\ \ddot{x}_2^1 \\ \ddot{x}_3^1 \\ \ddot{x}_1^2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{2N+1} \\ u_{2N+2} \\ \vdots \\ u_{2dN} \\ \hline F_1^1/m_1 \\ F_2^1/m_1 \\ F_3^1/m_1 \\ F_1^2/m_2 \\ \vdots \\ F_3^n/m_n \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad \dot{u} = f(u(t), t)$!

Beräkning av krafter:



Fjäderkraft:

$$(\|x^i - x^j\| - l_{ij}) \cdot k_{ij} \quad \text{(Hookes lag)}$$

Riktning:

$$\frac{x^j - x^i}{\|x^i - x^j\|}$$

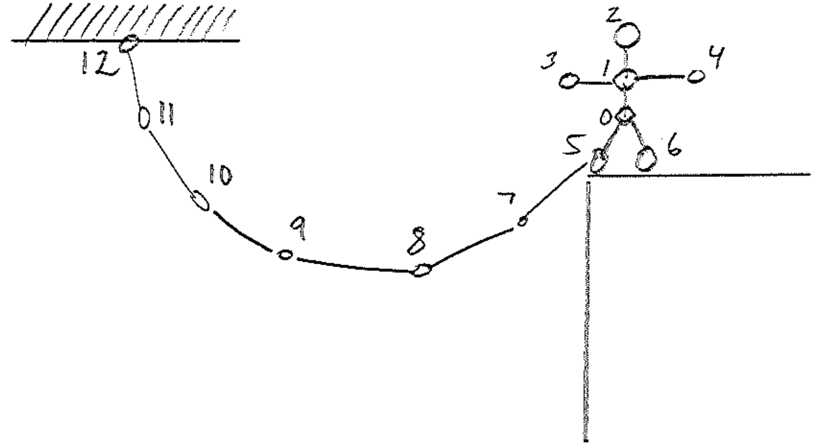
Gravitationskraft

$$(0, -m_i g) \quad \text{(om 2D)}$$

Summera krafter från alla partiklar:

$$\boxed{F^i = (0, -m_i g) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \cdot (\|x^i - x^j\| - l_{ij}) \cdot \frac{x^j - x^i}{\|x^i - x^j\|}}$$

Exempel: Bungyjump



Notera:

- Numrering från $0, \ldots, n-1$ (för implementation i Python)
- Ickelinjärt system: hur lösa?

I varje tidssteg måste vi lösa det ickelinjära systemet

$$\boxed{U^i = U^{i-1} + \underbrace{k_i \cdot f\left(\frac{U^i + U^{i-1}}{2}, \frac{t^i + t^{i-1}}{2}\right)}_{= g(U^i)}}$$

Hur lösa?

Med fixpunktsiteration!

<u>Notera</u>:

$$g' = \frac{dg}{dU} = \frac{k_i}{2} \cdot \frac{df}{du}$$

inre derivatan

$$\Rightarrow \quad L_g = |g'| < 1$$

om k_i (tidssteget) är tillräckligt litet!

(Enligt Banachs fixpunktssats ... :-)