

Idag: \* Övningstentan  
10 uppgifter med  
endast svar (3p)

4 uppgifter med  
fullständiga lösningar (5p)

Max 50p (+7 bonus)

Betygsgränser: 3 (20p)  
4 (30p)  
5 (40p)

Inga hjälpmedel

### Uppgift 1

Låt  $f(x) = x$  och  $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$   
vara en partition av  $[0, 1]$ . Beräkna  
den övre Riemannsumman.

Lösning:  $S_n = \sum_{i=1}^n f(u_i) \Delta x_i$  där  $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ,  $x_i = \frac{i}{n}$

$u_i \in [x_{i-1}, x_i]$  den punkt där  $f$  antar  
sitt maximala värde på  $[x_{i-1}, x_i]$ .

I detta fall  $u_i = x_i$  eftersom  $f(x)$  är växande

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}$$

Uppgift 3

Beräkna  $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

Lösning

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1+x^3 \\ du = 3x^2 dx \\ \frac{1}{3} du = x^2 dx \end{array} \right. =$$

$u(1) = 1+1^3 = 2 \rightarrow 2$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3} [2\sqrt{u}]_1^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1)$$

$u(0) = 1+0^3 = 1$

Uppgift 5

Lös differential ekvationen

$$y'(x) + x^2 y(x) = x^2, \quad y(0) = 0$$

Lösning

Vi använder integrerande faktor

$$(y e^{x^3/3})' = y' e^{x^3/3} + x^2 y e^{x^3/3} = x^2 e^{x^3/3}$$

Vi integrerar

$$y(x) e^{x^3/3} - y(0) e^{0^3/3} = \int_0^x t^2 e^{t^3/3} dt =$$

$$= \left[ e^{t^3/3} \right]_0^x = e^{x^3/3} - 1$$

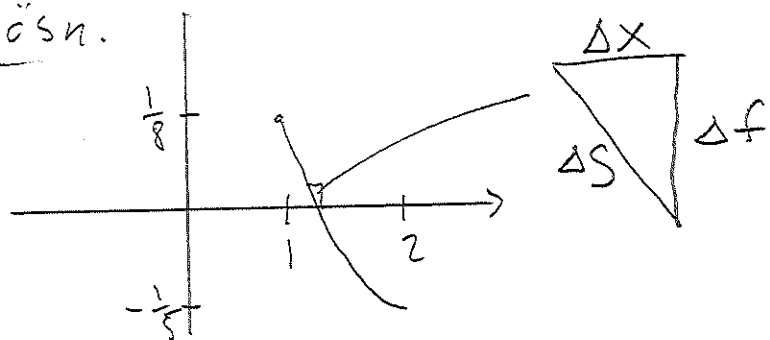
$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 1 - e^{-x^3/3}}$$

Uppgift 6

Beräkna längden av grafen till

funktionen  $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \log x$   
mellan  $x=1$  och  $x=2$ .

Lösn.



$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta f)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \text{ eller}$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$I = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \\ \Rightarrow f'(x)^2 + 1 = \end{cases}$$

$$= \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \left.\begin{matrix} \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2 \\ \int_1^2 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2 dx \end{matrix}\right\}$$

$$= \left[ \frac{x^2}{8} + \log x \right]_1^2 = \frac{3}{8} + \log 2$$

Uppgift 8

Vilken andra ordningens  
linjära differentialekvation

Löser  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ?

Lösning. Låt  $y(x) = \sinh(x)$ .

Vi noterar att  $y'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

och att  $y''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y(x)$ .

Alltså löser  $\sinh(x)$  ekvationen

$$y''(x) - y(x) = 0.$$

(Begynnelsevillkoren ges av  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ )

Uppgift 10

Beräkna Laplace transformen till  
 $\cos t$ ,  $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos t \, dt$

Lösning

Vi har att  $e^{it} = \cos t + i \sin t$   
 $e^{-it} = \cos t - i \sin t$

$$\Rightarrow e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t \Rightarrow$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$F(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{it} + e^{-it}) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{(i-s)t}}{i-s} - \frac{e^{-(i+s)t}}{i+s} \right]_0^{\infty}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{(i-s)t}| = 0 \quad \text{Re}(s) > 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-(i+s)t}| = 0 \end{array} \right\} =$$

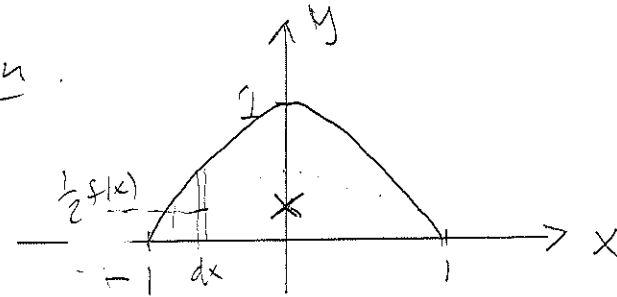
$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{s+i + (s-i)}{(s-i)(s+i)} \right]$$

$$= \boxed{\frac{s}{s^2 + 1}}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

## Uppgift 12

Beräkna centroiden för det område i planet som begränsas av x-axeln och funktionen  $f(x) = 1 - x^2$

Lösning



Vi har att  $\bar{x} = 0$  på grund av symmetri.

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} \quad \text{där} \quad m = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx \quad \text{och}$$

$$M_{y=0} = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} f(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(x) dx$$

$$\text{Vi får } m = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = 2 - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{4}{3}, \quad M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^1 1 - 2x^2 + x^4 dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{2}{5})$$

### Uppgift 14

$$h = 0.1; \quad x = 0; \quad y = 1;$$

while  $x < 1$

$$y = y + h * x * y * (1 - y);$$

$$x = x + h;$$

end

a) Vilken ekvation löser programmet?

b) Vilken numerisk metod är implementerad?

c) Vad approximerar utparametern  $y$ ?

Lösn.

Första raden i loopen kan skrivas

$$y_{n+1} = y_n + h x_n y_n (1 - y_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$y_0 = 1, \quad x_n = h \cdot n$$

a) b) Framåt Euler för att lösa

$$(*) \quad z'(x) = f(x, z) = xz(1-z)$$

c)  $y$  överlagras hela tiden. I sista iterationen innan vi lämnar while loopen är  $x = 1$ ,  $y = y_{10} \approx z(1)$

$y$  approximerar  $z(1)$ , där  $z$  löser  $(*)$ .

Extra uppgift

Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = te^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

med Laplace transform. Hint

$$\mathcal{L}(t^n e^t)(s) = \frac{n!}{(s-1)^{n+1}}$$

Lösning: Laplace transformering ger

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow (s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + 1$$

Därmed

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\text{Vi har } \mathcal{L}(t^3 e^t)(s) = \frac{3!}{(s-1)^4} = \frac{6}{(s-1)^4}$$

$$\text{och därmed } \mathcal{L}\left(\frac{1}{6}t^3 e^t\right)(s) = \frac{1}{(s-1)^4}$$

$$\text{Vi får då } y(t) = \frac{1}{6}t^3 e^t + te^t$$