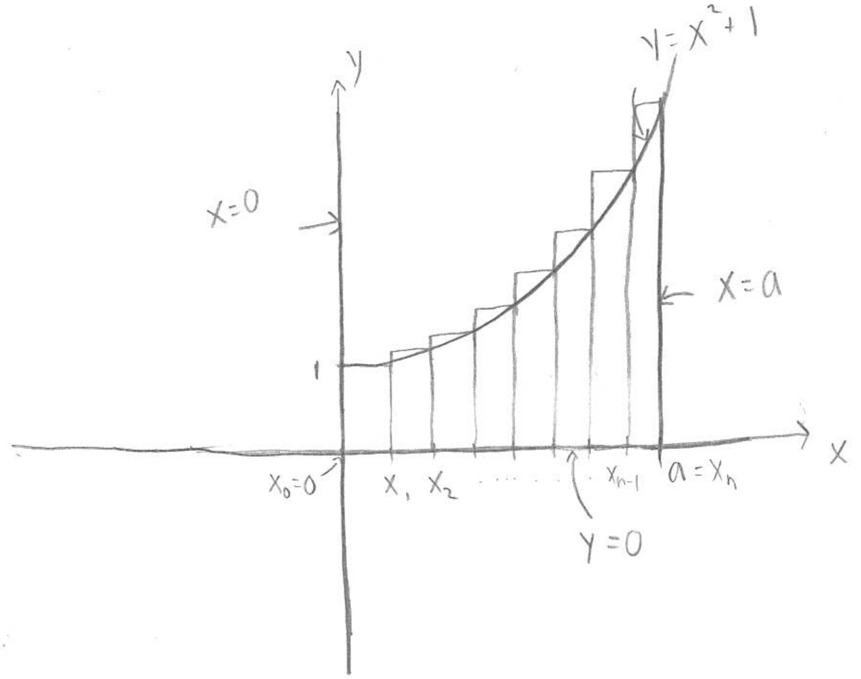
RÖ1. SUMMOR OCH INTEGRALER

A.5.2.6. Beräkna arean av området som begränsas av kurvorna
$y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = a$, $a > 0$.



Idé: dela upp intervallet $[0, a]$ i n lika långa delintervall och beräkna arean av alla staplar. Låt $n \to \infty$ så går arean av staplarna mot den riktiga arean.

Låt $[x_{i-1}, x_i]$ vara intervall i, $i = 1, \ldots, n$, med intervallängd
$\Delta x_i = \Delta x = \frac{a-0}{n} = a/n$ och $x_i = 0 + i \cdot \Delta x_i = i \cdot a/n$.

Då är $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, där $y = f(x)$.

Vi har $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^2 + 1)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(i^2 \frac{a^2}{n^2} + 1\right)\frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 + \frac{a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} 1$,

så

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ och } \sum_{i=1}^{n} 1 = n \right\} = \longrightarrow$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} . n = \{\text{dela varje term med } n\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^3 \cdot 1}{6} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(2+\frac{1}{n}\right)}_{\to 2} + \lim_{n\to\infty} a = \underline{\underline{\frac{a^3}{3} + a}}$$

$$\left(\text{jfr. } \int_0^a (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^a = \frac{a^3}{3} + a \right)$$

1.5.3.10. Beräkna den lägre och övre Riemannsumman för $f(x) = e^x$ på intervallet $[0,3]$, dvs $L(f, P_n)$ och $U(f, P_n)$, där P_n är en partitionering av intervallet i n lika långa delintervall.

Visa att

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$$

och dra slutsatsen att f är integrerbar på $[0,3]$. Vad är $\int_0^3 f(x)\,dx$?

DEF: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ är en partitionering av intervallet $[a,b]$ om $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

DEF: Om l_i är f:s minsta värde på delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ och u_i är f:s största värde på $[x_{i-1}, x_i]$ så är

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x_i \quad \text{och} \quad U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x_i$$

DEF: Om det bara finns ett tal I sådant att

$$L(f,P) \le I \le U(f,P)$$

gäller för alla partitioneringar P av $[a,b]$ så är f integrerbar på $[a,b]$ med integralen

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Vi har $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 3$.

Låt $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$

Eftersom e^x är strängt växande $\left(\frac{d}{dx}e^x = e^x > 0\right)$ gäller att

- $l_i = x_{i-1}$, $u_i = x_i$, på varje delintervall $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = \Delta x = \frac{3}{n}$.

- Vi får, med $x_i = 0 + i \cdot \Delta x_i = 3i/n$

$$\underline{L(f, P_n)} = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3(i-1)}{n}} \frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{3}{n}}\right)^{i-1} = \left\{ \text{geometrisk summa}, \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \right\} = \frac{3}{n}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{3}{n}}\right)^n}{1-e^{3/n}}\right) = \frac{3}{n}\left(\frac{1-e^3}{1-e^{3/n}}\right)$$

$$= 3(1-e^3)\cdot\frac{1/n}{1-e^{3/n}}$$

- $$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = 3(1-e^3)\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{1/n}}{\underbrace{1-\overset{\to e^0 = 1}{e^{3/n}}}_{\to 0}} = \left\{ \text{l'Hôpital, täljare och nämnare är deriverbara för stora } n \text{ och nämnaren} \neq 0 \right\} =$$

$$= 3(1-e^3)\lim_{n\to\infty}\frac{-1/n^2}{\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\text{inre derivata}} e^{3/n}} = 3(1-e^3)\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{3\underset{\to 1}{e^{3/n}}} = e^3 - 1$$

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3i}{n}}\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\cdot e^{\frac{3}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{3}{n}}\right)^{i-1} = \frac{3e^{3/n}}{n}\left(\frac{1-e^3}{1-e^{3/n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = 3(1-e^3)\lim_{n\to\infty}\frac{e^{3/n}/n}{1-e^{3/n}} = 3(1-e^3)\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{e^{-3/n}-1} =$$

$\{\text{l'Hôpital}\} = 3(1-e^3)\lim_{n\to\infty} \frac{-1/n^2}{3/n^2\, e^{-3/n}} = 3(1-e^3)\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{3\underbrace{e^{-3/n}}_{\to 1}}$

$e^3 - 1$

så är $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$, och f är integrerbar

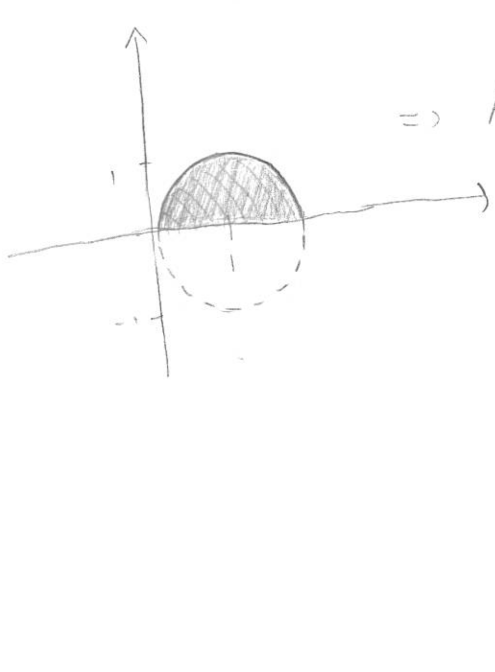
$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 e^x\,dx = e^3 - 1$

jfr. $\int_0^3 e^x\,dx = [e^x]_0^3 = e^3 - 1$)

5.4.12 Beräkna $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$ genom att tolka integralen som en area

at $y = \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{-(x-1)^2+1} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1^2$

En halvcirkel (eftersom $y \geq 0$) med centrum i (1,0) och radie 1!



$\Rightarrow A = \int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$