RÖ 6. MASSA, TYNGDPUNKT, CENTROID

Massa

Om vi har densiteten av ett föremål ges massan av

$$\int_V \rho \, dV,$$ där ρ är en funktion av

positionen och dV ett litet volymselement.

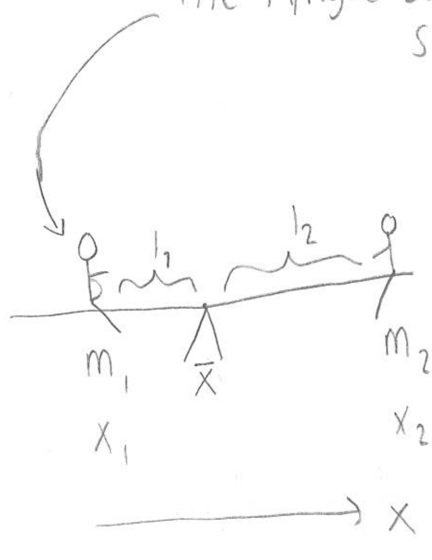
Tyngdpunkt

Den punkt man kan balansera ett föremål i och det ligger stilla.

Matematiskt är tyngdpunkten den punkt runt vilken det totala momentet är noll. Momentet runt en punkt x_0 från en massa m i punkten x är

$$M_{x_0} = m(x - x_0)$$

lite tyngre så måste sitta närmare!



$\bar{x}$ är tyngdpunkten

i exemplet om

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

$$\Leftrightarrow$$

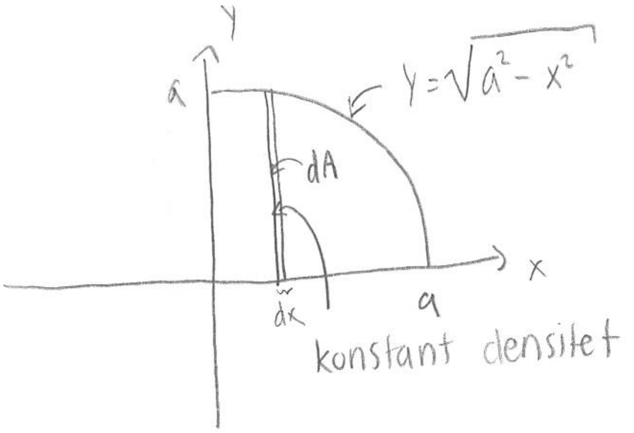
$m_1(x_1 - \bar{x}) + m_2(x_2 - \bar{x}) = 0$, dvs. det totala momentet är noll.

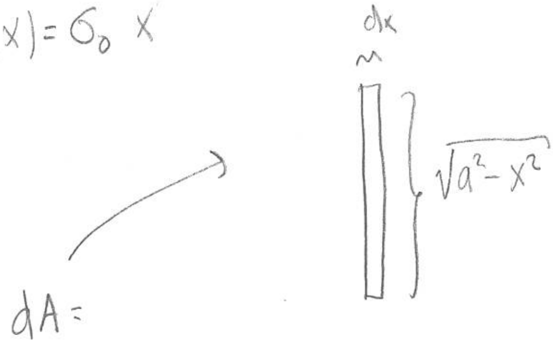
Om vi har en massa kontinuerligt i varje punkt får vi integrera

$$M_{x_0} = \int_a^b (x - x_0)\rho(x)\,dx$$

1D: I tyngdpunkten $\bar{x}$ har vi $M_{\bar{x}} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx} = \dfrac{1}{m}\int_a^b x\rho(x)\,dx$

A.7.4.4 Beräkna massa och tyngdpunkt för området $R = x^2+y^2 \le a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, där areadensiteten $\sigma(x) = \sigma_0 x$





$$m = \int_R dm = \int_R \sigma\, dA = \int_{x=0}^{a} \sigma_0 x \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left\{ \sqrt{a^2-x^2} = t,\quad dt = \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad dx = -\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}\,dt \right\}$$

$$= \sigma_0 \int_{t=a}^{0} x\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{-1}{x}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= -\sigma_0 \int_{t=a}^{0} t^2\,dt = -\sigma_0\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^0 = -\sigma_0\left(0-\frac{a^3}{3}\right) = \sigma_0\frac{a^3}{3}$$

i punkten x har vi nu en massa med rektangulär area!

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^a x\,\underbrace{\sigma(x)\cdot \overbrace{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}^{dA}}_{dm} = \frac{1}{m}\int_0^a x\sigma_0 x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{\sigma_0}{m}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \Bigg\{$$

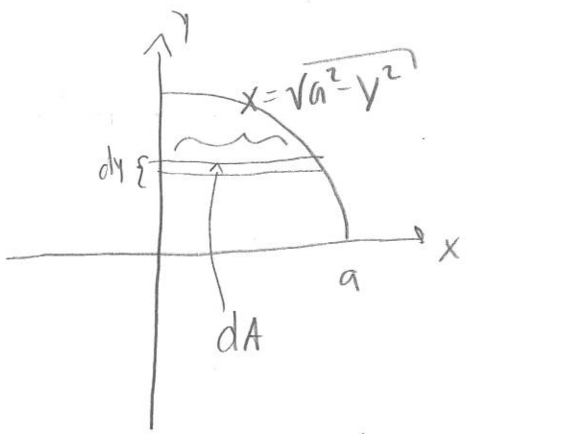
$$\sin\theta = \frac{x}{a} \iff \theta = \arcsin\frac{x}{a}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad x = a\sin\theta$$
$$dx = a\cos\theta \Bigg\}$$

$$= \frac{\sigma_0}{m}\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2\theta\cdot a^2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\sigma_0 a^4}{m}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$\sigma_0\frac{a^4}{m}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 d\theta = \frac{\sigma_0 a^4}{4m}\int_0^{\pi/2}(\sin 2\theta)^2\,d\theta = \frac{\sigma_0 a^4}{4m}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos 4\theta)}{2}$$

$$= \frac{\sigma_0 a^4}{4m}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma_0 a^4}{4m}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sigma_0 a^4}{16\frac{\sigma_0 a^3}{3}} = \frac{3\pi a}{16}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_0^a y\,dm = \frac{1}{m}\int_0^a y\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{a^2-y^2}\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$



$$= \frac{1}{2m}\sigma_0\int_0^a y(a^2-y^2)\,dy$$

$$= \frac{\sigma_0}{2m}\left[\frac{a^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^a$$

$$= \frac{\sigma_0}{2m}\left[\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right] = \frac{\sigma_0 a^4}{8m}$$

$$= \frac{\sigma_0 a^4}{8\frac{\sigma_0 a^3}{3}} = \frac{3a}{8}$$

$dm = \sigma(y)\,dA$

Vi vet inte $\sigma(y)$, men kan använda oss av medelvärdet på dA, $\frac{1}{2}(\sigma_0\sqrt{a^2-y^2}+\sigma_0 0)$

max x på intervallet i x-ledd   min x

$= \frac{\sigma_0 a}{2}$

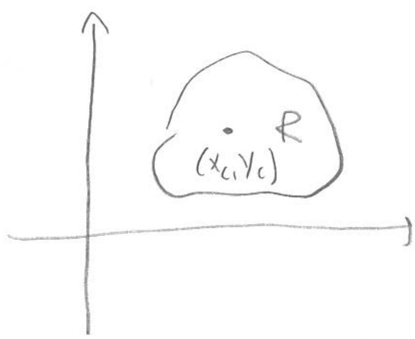
- Centroid

Samma som tyngdpunkt fast med konstant densitet.

- Pappus sats

Specialfall: rotation kring x- och y-axeln.

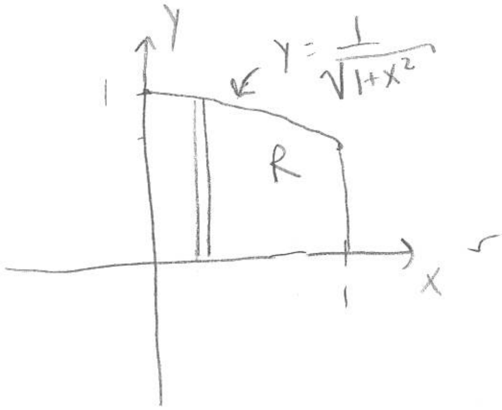
Centroiden av R, (x_c, y_c), ges av



$$x_c = \frac{V_y}{2\pi A}$$

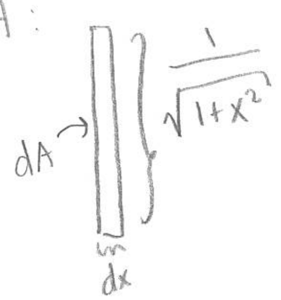
$y_c = \frac{V_x}{2\pi A}$, där V_x, V_y är rotationsvolymen då man roterar R runt x-, respektive y-axeln. och A är arean hos R.

A.7.5.3. Beräkna centroiden av området $R: 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



$y(0) = 1,\ y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$

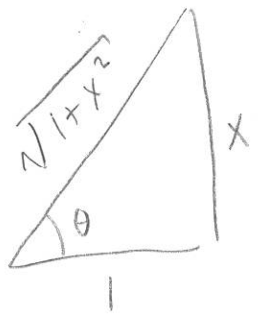
Arean A:



$$A = \int dA = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \left[\ln\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right)\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1)$$



$\tan\theta = x \iff x = \arctan\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

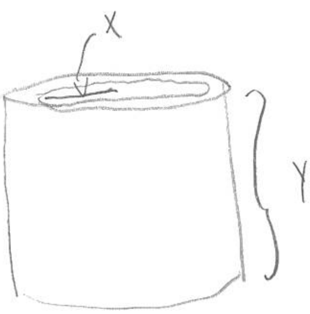
$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

V_x Cirkelskivor

$dV = \pi y^2 dx = \pi \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$V_x = \int dV = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\pi \arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

V_y cylindriska skal



$dV = \frac{2\pi x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$$V_y = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \{1+x^2 = t \quad dt = 2x\,dx\} = 2\pi \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= 2\pi[\sqrt{t}]_1^2 = 2\pi(\sqrt{2}-1)$$

Vi får $X_c = \dfrac{V_y}{2\pi A} = \dfrac{2\pi(\sqrt{2}-1)}{2\pi\ln(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\ln(\sqrt{2}+1)}$

$$Y_c = \frac{V_x}{2\pi A} = \frac{\pi^2/4}{2\pi\ln(\sqrt{2}+1)} = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)}$$

- Integrerande faktor

Differentialekvationer på formen $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$

- Kan lösas genom att multiplicera hela ekvationen med den integrerande faktorn $e^{F(x)}$. Vi får

$$e^{F(x)}y'(x) + f(x)e^{F(x)}y(x) = e^{F(x)}g(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}\cdot y(x)\right) = e^{F(x)}\cdot g(x)$$

- Integrera båda sidor $\Rightarrow$

$$e^{F(x)}\cdot y(x) = \int e^{F(x)}g(x)\,dx \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{e^{F(x)}}\cdot\int e^{F(x)}g(x)\,dx.$$

A.7.9.12 Lös $y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{2}{x} \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x$

Multiplicera med $e^{F(x)} \Rightarrow$

$$e^{2\ln x}y'(x) + \frac{2}{x}e^{2\ln x}y(x) = e^{2\ln x}\frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2\ln x}\cdot y(x)\right) = 1 \Rightarrow e^{2\ln x}\cdot y(x) = x + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$$