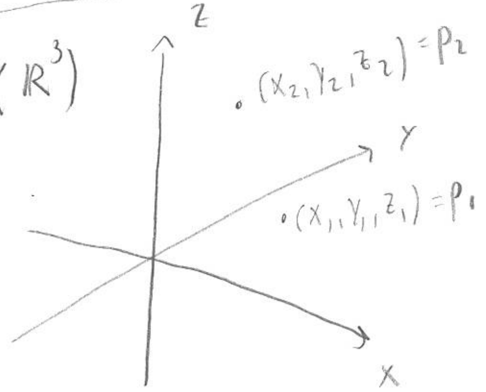
RÖ9. ANALYTISK GEOMETRI

I 3D ($\mathbb{R}^3$)



Kartesiskt koordinatsystem, tre axlar genom origo som skär varandra med rät vinkel.

Avståndet mellan två punkter P_1 och P_2 ges av

$$r = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

10.1.5. Vilket är det kortaste avståndet från punkten $P = (x, y, z)$ till a) xy-planet, b) x-axeln?

a) I xy-planet är en godtycklig punkt $(x', y', 0)$, dvs $z = 0$ och x', y' vilka tal som helst.

Minsta avståndet får vi om vi minimerar

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-0)^2},$$

så $$r_{min} = \min_{x', y' \in \mathbb{R}} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = \sqrt{z^2} = \underline{\underline{|z|}}$$

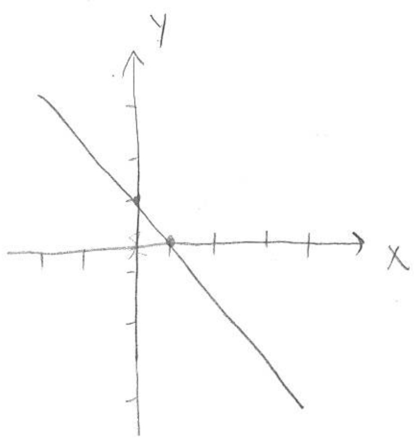
eftersom $(x-x')^2, (y-y')^2$ är som minst då $x' = x$ och $y' = y$.

b) På x-axeln är en godtycklig punkt $(x', 0, 0)$

$$r_{min} = \min_{x' \in \mathbb{R}} \sqrt{(x-x')^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$

$$= \min_{x' \in \mathbb{R}} \sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + z^2} \text{ för } x' = x.$$

10.1.15. Beskriv området i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller $x+y=1$

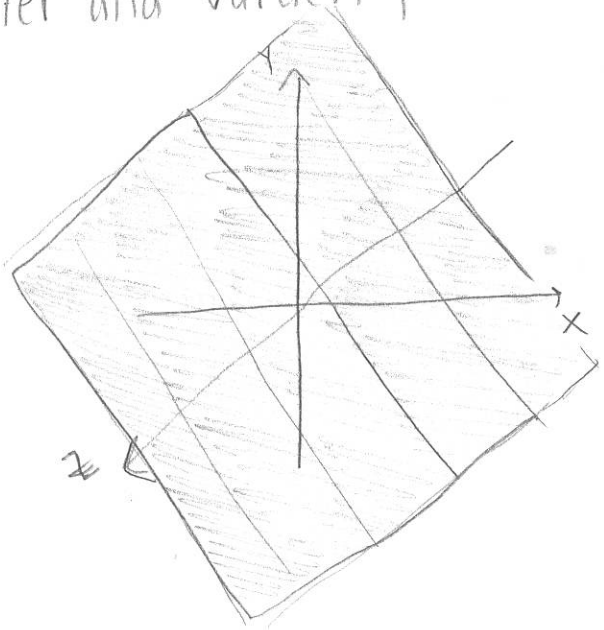


$x+y=1 \iff y=1-x$

I $\mathbb{R}^2$ är det en linje.

I $\mathbb{R}^3$ blir det ett plan eftersom vi tillåter alla värden på z.

Planet som går genom punkterna $(1,0,0)$ och $(0,1,0)$ är parallellt med z-axeln.



10.1.27. Beskriv mängden i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 & (1) \\ x^2+y^2+z^2=4x & (2) \end{cases}$$

$x^2+y^2+z^2=r^2$ en sfär med radie r och centrum i $(0,0,0)$

$x^2+y^2+z^2=4x \iff (x-2)^2-4+y^2+z^2=0 \iff (x-2)^2+y^2+z^2=4$

en sfär med radie 2 och centrum i $(2,0,0)$

Sätter vi $(1)=(2)$ får vi

$4=4x \Rightarrow x=1$

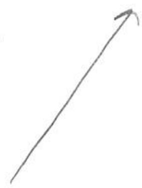
Sätter vi in detta i (1) får vi $1^2+y^2+z^2=4 \iff y^2+z^2=3$

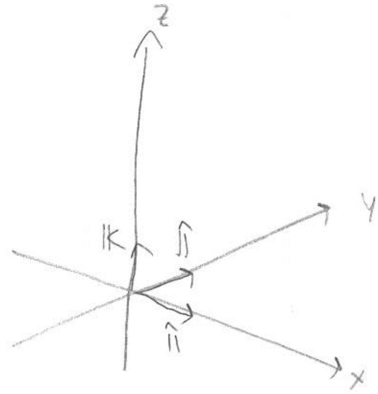
En cirkel med radie $\sqrt{3}$ parallell med x-axeln med centrum i

(1,0,0)

Vektorer

En vektor har storlek och riktning, kan representeras med en pil





I $\mathbb{R}^3$ kallas vektorerna

(1,0,0) för $\hat{i}$

(0,1,0) för $\hat{j}$

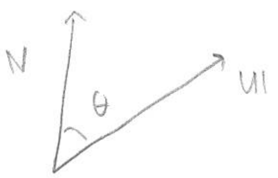
(0,0,1) för $\hat{k}$ De är basvektorer för $\mathbb{R}^3$ så man kan få alla andra vektorer genom linjärkombinationer av dem. T.ex.

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

Skalärprodukt (mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$)

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$



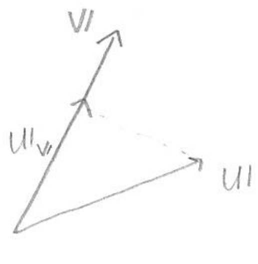
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\theta = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

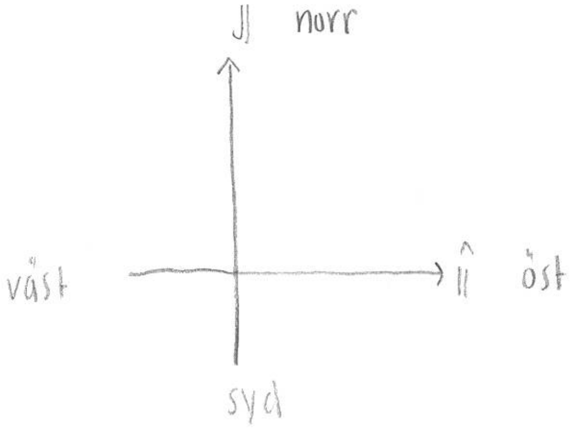
Projektion

Projektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$ ges av

$$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$



10.2.9 En vindmätare på taket på en bil som kör i 50 km/h norrut säger att vinden kommer från väst. När bilen kör i 100 km/h säger vindmätaren att vinden kommer från nordväst.
Från vilken riktning kommer vinden och vad är vindens fart?



Vi använder att

$$\mathbb{V}_{a\,rel\,b} = \mathbb{V}_{a\,rel\,c} - \mathbb{V}_{b\,rel\,c}$$

a = vinden, b = marken, c = bilen

Låt $\mathbb{V} = \mathbb{V}_{a\,rel\,b} = V_i\,\hat{i} + V_j\,\hat{j}$ Vad är V_i och V_j?

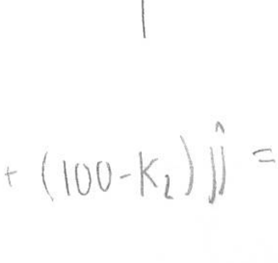
Då bilen kör i 50 km/h:

vinden kommer från väst enligt mätaren på bilen,
dvs $\mathbb{V}_{a\,rel\,c} = k_1\hat{i}$ för någon konstant k_1
Bilen kör i 50 km/h norrut, dvs $\mathbb{V}_{c\,rel\,b} = 50\,\hat{j} \Rightarrow \mathbb{V}_{b\,rel\,c} = -50\,\hat{j}$

Vi får $\mathbb{V}_{a\,rel\,b} = \mathbb{V}_{a\,rel\,c} - \mathbb{V}_{b\,rel\,c} = k\,\hat{i} + 50\,\hat{j}$ (1)

Då bilen kör i 100 km/h:

vinden kommer från nordväst enligt mätaren på bilen,
dvs $\mathbb{V}_{a\,rel\,c} = k_2\hat{i} - k_2\hat{j}$ för någon konstant $k_2 > 0$.



Bilen kör i 100 km/h norrut, dvs $\mathbb{V}_{b\,rel\,c} = -100\,\hat{j}$

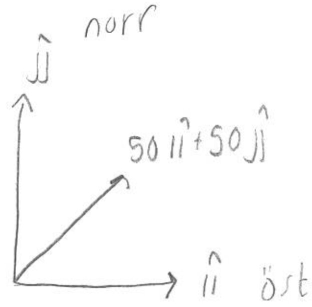
$\mathbb{V}_{a\,rel\,b} = \mathbb{V}_{a\,rel\,c} - \mathbb{V}_{b\,rel\,c} = k_2\hat{i} + (100 - k_2)\hat{j}$ (2)

Sätter vi (1) och (2) lika får vi $k\hat{i} + 50\hat{j} = k_2\hat{i} + (100-k_2)\hat{j} = \mathbb{V}$

$\Rightarrow k = k_2 = 50 \Rightarrow \mathbb{V} = 50\,\hat{i} + 50\,\hat{j}$

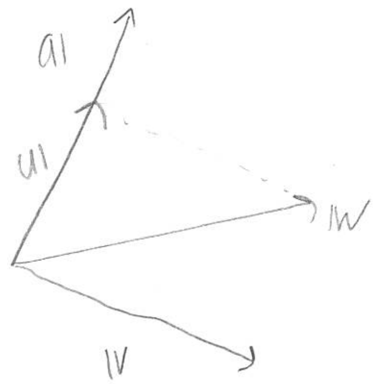
Fartan är $\|v\| = \sqrt{50^2+50^2} = \sqrt{2} \cdot 50$ km/h

Riktningen är nordöst eftersom $v_i = v_j = 50 > 0$.



10.2.31. Låt $\mathbf{a}$ vara en nollskild vektor och $\mathbf{w}$ en godtycklig vektor. Hitta $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så att $\mathbf{u}$ är parallell med $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ är vinkelrät till $\mathbf{a}$ och $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$.

$$\begin{cases} \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w} & & (1) \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=0 & \text{(vinkelräta)} & (2) \\ \mathbf{u}=t\,\mathbf{a} & \text{(parallella)} & (3) \end{cases}$$



Vi vet att $\mathbf{u}=t\,\mathbf{a}$, vad är t?

Från (1) och (3) får vi

$$\mathbf{w}-\mathbf{v}=t\,\mathbf{a} \qquad (4)$$

Nu har vi bara ekv (2) kvar att använda, så vi får ta (4) skalärt med $\mathbf{a}$.

$$(\mathbf{w}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{a}=t\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=t\,|\mathbf{a}|^2 \iff$$

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}-\cancel{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}=t\,|\mathbf{a}|^2 \iff \left\{\begin{array}{l}\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=0 \text{ enl. (2)!} \\ \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}=|\mathbf{a}|\end{array}\right\}$$

$$t=\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \quad \text{så}$$

$$\mathbf{u}=t\,\mathbf{a}=\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$ vilket är projektionen av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{a}$!

Vi har $\mathbf{v}=\mathbf{w}-\mathbf{u}=\mathbf{w}-\dfrac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$

Determinant

I 3D: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

I 2D: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Kryssprodukt (mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = u_2 v_3 \hat{\mathbf{i}} + u_3 v_1 \hat{\mathbf{j}} + u_1 v_2 \mathbf{k}$$

$$- u_2 v_1 \mathbf{k} - u_1 v_3 \hat{\mathbf{j}} - u_3 v_2 \hat{\mathbf{j}} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, dvs

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

10.3.5. Hitta en enhetsvektor som är vinkelrät mot vektorerna

$\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ och $\hat{\mathbf{j}} + 2\mathbf{k}$

$$\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} = 1 \cdot \hat{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{\mathbf{j}} + 0 \cdot \mathbf{k} = (1, 1, 0)$$

$$\hat{\mathbf{j}} + 2\mathbf{k} = 0 \cdot \hat{\mathbf{i}} + 1 \cdot \hat{\mathbf{j}} + 2 \cdot \mathbf{k} = (0, 1, 2)$$

Vi vet att $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

Så vi räknar ut $(\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{j} + 2k)$

$$(\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{j} + 2k) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2\,\hat{i} + 0 \cdot 0 \cdot \hat{j} + 1 \cdot 1 \cdot k - 1 \cdot 0\, k - 1 \cdot 2 \cdot \hat{j} - 0 \cdot 1 \cdot \hat{i}$$

$$= 2\hat{i} - 2\hat{j} + k = (2, -2, 1)$$

Enhetsvektorer har längden 1 => vi måste dela med längden på vektorn

$$|(2, -2, 1)| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

=> svaret blir $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}k$.

10.3.11. verifiera att $u \cdot (u \times v) = v \cdot (u \times v) = 0$.

Låt $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$.

$$u \cdot (u \times v) = u \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= u \cdot \left[(u_2 v_3 - v_2 u_3)\hat{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\hat{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k \right]$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - v_2 u_3,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= \underbrace{u_1 u_2 v_3}_{(1)} - \underbrace{u_1 v_2 u_3}_{(2)} + \underbrace{u_2 u_3 v_1}_{(3)} - \underbrace{u_2 u_1 v_3}_{(1)} + \underbrace{u_3 u_1 v_2}_{(2)} - \underbrace{u_3 u_2 v_1}_{(3)}$$

$$= 0$$

På samma sätt för $v \cdot (u \times v)$ får man att

$$u \cdot (u \times v) = v \cdot (u \times v) = 0$$