RÖ 10. MATRISER OCH LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

10.7.1. Beräkna $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 3\cdot2+0\cdot3-2\cdot0 & 3\cdot1+0\cdot0+(-2)\cdot(-2) \\ 1\cdot2+1\cdot3+2\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot0+2\cdot(-2) \\ -1\cdot2+1\cdot3-1\cdot0 & -1\cdot1+1\cdot0+(-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10.7.3 Beräkna $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix}$$

10.7.5. Beräkna AA^T och $A^2 = AA$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A^T? Byt plats på rader och kolonner. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.7.19. Lös $\begin{cases} x - z = -2 \\ -x + y = 1 \\ 2x + y + 3z = 13 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - z = -2 \Rightarrow x = z - 2 \\ -x + y = 1 \Rightarrow -(z-2) + y = 1 \Rightarrow y = z - 1 \\ 2x + y + 3z = 13 \Rightarrow 2(z-2) + z - 1 + 3z = 13 \iff 2z - 4 + z - 1 + 3z = 13 \end{cases}$$

$\iff 6z = 18 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow y = z - 1 = 2, \; x = z - 2 = 1$

Svar: $x = 1, \; y = 2, \; z = 3$

X.3. Lös $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 3x + 2y + z = 10 & (2) \\ -y + z = 1 & (3) \end{cases}$

(3): $-y + z = 1 \Rightarrow z = 1 + y$

(3) i (1): $x + y + z = x + y + 1 + y = 6 \Rightarrow x = 5 - 2y$

(3) och (1) i (2): $3x + 2y + z = 3(5 - 2y) + 2y + 1 + y = -3y + 16 = 10 \Rightarrow y = 2$

$y = 2 \Rightarrow z = 1 + y = 3$ och $x = 5 - 2y = 1$

Svar: $x = 1, \; y = 2, \; z = 3$

X.5.a) Skriv $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$ på matrisform

Matrisform: $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$

$b = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vilken storlek ska A ha?

$$\underset{m\times n}{A}\ \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$m=2,\ n=2$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

Jämför med ursprungliga ekvationen! $a=2,\ b=3,\ c=1,\ d=-1$

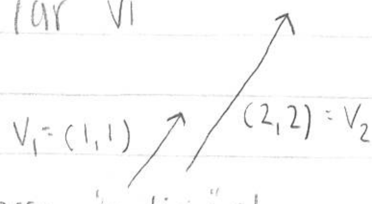
$\Rightarrow$ Svar: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

Linjärt beroende

Ett antal vektorer $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \ldots, \mathbb{V}_n$ är linjärt oberoende om

(1) $c_1\mathbb{V}_1 + c_2\mathbb{V}_2 + \ldots + c_n\mathbb{V}_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$,

annars är de linjärt beroende. Det betyder att man kan skriva någon av vektorerna som en linjärkombination av de andra.
Om t.ex. $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ och $c_3 \neq 0$ och (1) gäller får vi
$c_1\mathbb{V}_1 = -c_2\mathbb{V}_2 - c_3\mathbb{V}_3$



$\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ är då linjärt beroende.

Dessa är linjärt beroende då $V_2 = 2\cdot V_1$

X.6. a) Avgör om $\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\2\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\4\\-8\end{bmatrix}$ är linjärt beroende.

Vi kollar om c_1, c_2, c_3 måste vara noll ifall

$$c_1\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}7\\2\\-6\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}9\\4\\-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Vi får
$$\begin{cases} 5c_1 + 7c_2 + 9c_3 = 0 & (1) \\ 2c_2 + 4c_3 = 0 & (2) \\ -6c_2 - 8c_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Se om vi kan lösa ut c_1, c_2, c_3 ur detta utan att de måste vara noll.

(2): $2c_2 + 4c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_3$

(3) $-6c_2 - 8c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{8}{6}c_3 = -\frac{4}{3}c_3 \Rightarrow -2c_3 = -\frac{8}{6}c_3 \Rightarrow c_3 = c_2 = 0$

c_2 ska vara både $-2c_3$ och $-\frac{4}{3}c_3$, går bara om $c_2 = c_3 = 0$!

Kan c_1 vara nollskild om $c_2 = c_3 = 0$?

(1): $5c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ nej! Alltså är vektorerna linjärt oberoende.

c) Avgör om $\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}$ är linjärt beroende

$$c_1\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\0\\-8\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad -c_3 = 0 & \Rightarrow c_3 = 0 \\ 2c_1 \quad\quad + c_3 = 0 & \Rightarrow c_1 = 0 \\ 3c_1 - 8c_2 + c_3 = 0 & \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{linjärt oberoende}}$$

X.7. För vilket värde på a är vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 & \Rightarrow c_1 = c_2 \quad (1) \\ a c_1 + 2c_2 = 0 & \Rightarrow a c_1 = -2c_2 \quad (2) \end{cases}$$

Vi vill hitta a så att detta är uppfyllt även om c_1 eller c_2 eller båda inte är noll.

Sätt in (1) i (2). $ac_1 = -2c_1$ $c_1 = c_2 \neq 0$ så måste a vara -2.
För alla andra värden på a, t.ex $a=1$, hade bara $c_1 = c_2 = 0$ löst systemet, och $c_1 = c_2 = 0$ betyder att vektorerna är linjärt oberoende.

<u>Svar</u>: $a = -2$.