RÖ 11. SYSTEM AV DIFFERENTIALEKVATIONER

18.4.7. Visa att differentialekvationen

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

kan skrivas om som ett system av första ordningens d.e. på formen

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \text{ där } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

Låt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$. Vi får

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = -a_1 y' - a_0 y + f(x) = -a_1 y_2 - a_0 y_1 + f(x). \end{cases}$$

Låt $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$

Då blir $A\mathbf{y} + \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -a_0 y_1 - a_1 y_2 + f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{y}'$

18.4.9. Om A är en $n \times n$-matris och det finns en konstant λ och en vektor $\mathbf{v}$ av konstanter som uppfyller

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

Visa att $\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda x} \mathbf{v}$ löser $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Eftersom $\mathbf{v}$ är konstant och $\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda x} \mathbf{v}$ är

$$\mathbf{y}' = c_1 \lambda e^{\lambda x} \mathbf{v} = c_1 e^{\lambda x} \lambda \mathbf{v} = c_1 e^{\lambda x} A \mathbf{v} = A\underbrace{(c_1 e^{\lambda x} \mathbf{v})}_{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$

bara $e^{\lambda x}$ beror av x

vi kan flytta om konstanter

givet i uppgiften

vi kan flytta om konstanter

X.9. Skriv om ekvationen

$$y'' - 2y' - 3y = x \quad , \; y(0) = 1 \, , \; y'(0) = 0 \, ,$$

som ett system av första ordningens ode:er. Skriv på matrisform. Beräkna lösningen.

Låt $y_1 = y$, $y_2 = y'$. Vi får

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & , \; y_1(0) = 1 \, , \\ y_2' = 2y_2 + 3y_1 + x & , \; y_2(0) = 0 \, . \end{cases}$$

<u>Matrisform</u> $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}$

Låt $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$

<u>Lösning:</u> $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

y_h: Kar. ekv. $r^2 - 2r - 3 = 0 \iff (r-1)^2 - 4 = 0 \iff (r-1)^2 = 4$

$\Rightarrow r = 1 \pm 2 \Rightarrow r_1 = 3, \; r_2 = -1$

$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

<u>$y_p(x)$</u>: $f(x) = x \Rightarrow$ Vi ansätter $y_p(x) = ax + b$.

$y_p'(x) = a$, $y_p''(x) = 0$

Sätt in i ekvationen $y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -2a - 3(ax + b) = x$

Vi får $\begin{cases} -2a - 3b = 0 & \Rightarrow b = -\frac{2}{3}a \\ -3a = 1 & \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{9} \end{cases}$

$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

Alltså är $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$, $y'(x) = 3C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} - \frac{1}{3}$

Vi använder begynnelsevärdena $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ för att bestämma C_1 och C_2.

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{7}{9} - C_2$$

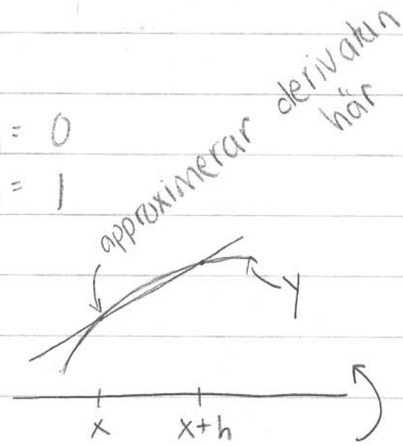
$$y'(0) = 3C_1 - C_2 - \frac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\left(\frac{7}{9} - C_2\right) - C_2 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - 3C_2 - C_2 - \frac{1}{3} = 2 - 4C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{7}{9} - \frac{1}{2} = \frac{14}{18} - \frac{9}{18} = \frac{5}{18}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{5}{18} e^{3x} + \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$$

X.13. d) Formulera Euler framåt för $\begin{cases} \dot{u} = -v & , u(0) = 0 \\ \dot{v} = -v^2 & , v(0) = 1 \end{cases}$

då $h = 0.1$. Beräkna ett steg i algoritmen.



Euler framåt

Vi vill lösa $y'(x) = f(x, y(x))$

Vi approximerar

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$$, framåt differens!

$$\Rightarrow y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f(x, y(x))$$ eller

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)}$$

Vi får $\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} -v_i \\ -v_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} - 0.1 \begin{bmatrix} v_i \\ v_i^2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ett steg: $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - 0.1 \begin{bmatrix} v_0 \\ v_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.9 \end{bmatrix}$

X.14.b) Formulera Euler bakåt för $y'' + \sin y = x\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

Först måste vi skriva om till ett första ordningens system.
Låt $u = y$, $v = y'$

$$\begin{cases} u' = v & , y_1(0) = 1, \\ v' = -\sin u + x\cos x & , y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Euler bakåt

$$y' = f(x, y)$$

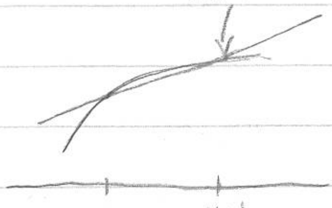
Approximera

bakåtdifferens!

$$y'(x+h) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x+h, y(x+h))$$

approximerar derivatan här.

Vi får $y(x+h) \approx y(x) + hf(x+h, y(x+h))$ eller



$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})}$$

I detta fallet: $\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_{i+1} \\ -\sin u_{i+1} + x_{i+1}\cos x_{i+1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$