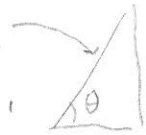
ÖVNINGSTENTA

2. Beräkna $\int_0^1 x e^{2x}\, dx$.

Integralknep:

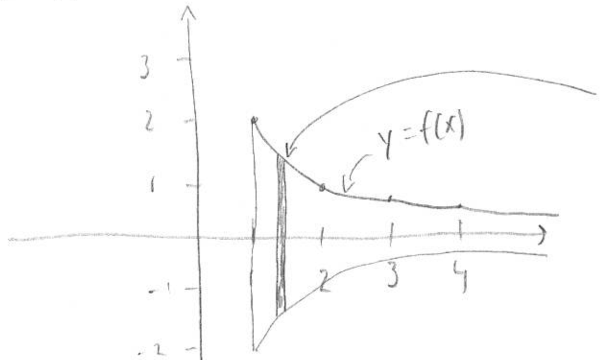
1. variabelsubstitution, ny variabel (t.ex. t) gör uttrycket enklare
2. partiell integration, "derivera bort" något
3. inverssubstitution,
4. partialbråksuppdelning,  för integrander $\frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polynom

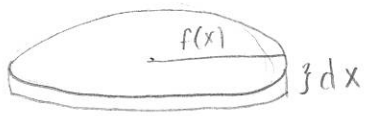
partiell integration! $\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \left[x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(e^2+1)$$

4. Beräkna volymen som genereras då $f(x) = \frac{2}{x}$ roteras runt x-axeln för $x \geq 1$.





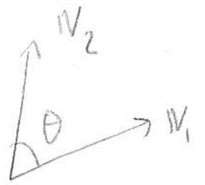
$$dV = \pi (f(x))^2 dx$$
$$= \pi \frac{4}{x^2} dx$$

$$V = \int_{x=1}^{\infty} dV = \int_1^{\infty} \frac{4\pi}{x^2}dx = 4\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty} 4\pi \int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{4\pi}{x}\right]_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\frac{4\pi}{R} - \left(-\frac{4\pi}{1}\right) = 4\pi \text{ v.e}$$

7. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $2\hat{\mathbb{i}} - \hat{\mathbb{j}} + 3\mathbb{k}$ och $\hat{\mathbb{i}} + \hat{\mathbb{j}} - 2\mathbb{k}$.

Kom ihåg att $\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{v}_2 = |\mathbb{v}_1||\mathbb{v}_2| \cdot \cos\theta$



$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{v}_2}{|\mathbb{v}_1||\mathbb{v}_2|}\right)$

Låt $\mathbb{v}_1 = 2\hat{\mathbb{i}} - \hat{\mathbb{j}} + 3\mathbb{k} = (2,-1,3)$, $\mathbb{v}_2 = \hat{\mathbb{i}} + \hat{\mathbb{j}} - 2\mathbb{k} = (1,1,-2)$

$\Rightarrow \theta = \arccos \frac{(2,-1,3)\cdot(1,1,-2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \arccos\left(\frac{2\cdot 1 - 1\cdot 1 - 3\cdot 2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}\right)$

$= \arccos\left(\frac{-5}{2\sqrt{21}}\right)$ rad.

9. Skriv $\begin{cases} y'' + \cos(y') + y^2 = \sin(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ som ett system av första ordningens differentialekvationer.

Låt $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = -y^2 - \cos(y') + \sin x = -y_1^2 - \cos(y_2) + \sin x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \quad , \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' = -y_1^2 - \cos y_2 + \sin x \quad , \quad y_2(0) = 0 \end{cases}$

13. Lös $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Vi vet att $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ där y_h löser motsvarande homogena ekvation och y_p är en partikulärlösning.

y_h: Kar. ekv. $r^2 - 2r - 3 = 0 \iff (r-1)^2 - 4 = 0 \iff (r-1)^2 = 4$

$\Rightarrow r - 1 = \pm 2 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm 2$

Reella och olika rötter $\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

y_p: Högerledet är ett polynom av grad två, x^2.
Därför ansätter vi $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, ett polynom av samma grad.

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

y_p ska lösa den ursprungliga ekvationen, därför kan vi sätta in y_p i den $\Rightarrow y_p'' - 2y_p' - 3y_p = x^2$

$\iff 2a - 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2$

$\iff -3ax^2 - (3b + 4a)x + 2a - 2b - 3c = x^2$

jämför koefficienter:

$-3a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$-4a - 3b = 0 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}a = \frac{4}{9}$

$2a - 2b - 3c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{3}(2a - 2b) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\right) = \frac{-6-8}{27} = -\frac{14}{27}$

$\Rightarrow y_p(x) = ax^2 + bx + c = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$ och

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$

För att hitta C_1 och C_2 får vi använda initialvillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{14}{27} = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{41}{27} - C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{164 - 29}{108} = \frac{135}{108}$

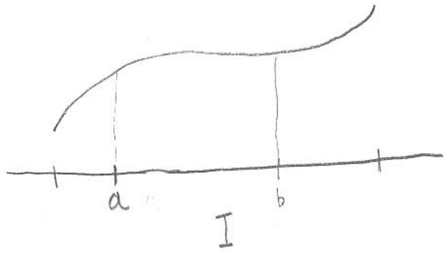
$y'(0) = 3C_1 - C_2 + \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow 3C_1 - \frac{41}{27} + C_1 + \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow 4C_1 = \frac{29}{27} \Rightarrow C_1 = \frac{29}{108}$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{29}{108}e^{3x} + \frac{135}{108}e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$$

$$= \frac{1}{108}\left(29e^{3x} + 135e^{-x} - 36x^2 + 48x - 56\right)$$

1. Formulera och bevisa analysens fundamentalsats.

Antag att f är en kontinuerlig fkn på ett intervall I som innehåller punkten a.



Del 1: Låt $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in I$.

"Derivatan av integralen av en funktion är funktionen själv"

Då är F deriverbar på I med $F'(x) = f(x)$, dvs $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)}$

Del 2: Låt $G(x)$ vara en funktion som uppfyller $G'(x) = f(x)$ på I

dvs G är en primitiv till f

Då är $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$ för något $b \in I$.

"om man vill räkna ut integralen räcker det att hitta någon primitiv funktion och utvärdera i ändpunkterna"

Bevis

Del 1

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$h = kx + n$

$= \{$medelvärdessatsen för integraler $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ för något $c \in (a,b)\}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(c), \text{ något } c \in (x, x+h)$$

$= f(x)$ eftersom $c \to x$ då $h \to 0$

Del 2: Vi vet att $G'(x) = f(x)$, dvs G är en primitiv till f.

Då är $F(x) = G(x) + C$, eftersom $F'(x) = G'(x) + 0 = f(x)$ (dvs två primitiva funktioner är lika sånär som på en konstant)

Vi får att

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x) + C$$

sätter vi in $x = a$ får vi

$$0 = G(a) + C \Rightarrow C = -G(a)$$

så att $\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$

Sätter vi in $x = b$ får vi

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$ vsv.