

DUGGA

TMV151

Matematisk analys i en variabel M1, 2017–11–21

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje rätt svar ger 1 bonuspoäng på tentan. ANGE ENDAST SVAR PÅ UPPGIFTERNA.

Namn:..... Antagningsår.....

Personnummer:..... Email.....

1. Givet $f(x) = x(1 - x)$ och en partition av intervallet $[0, 1]$ i 4 lika långa delintervall, beräkna den undre Riemannsumman.

Lösn. $L(f, P) = \frac{1}{4}(f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(1)) = \frac{3}{32}$.

2. Beräkna integralen $\int_1^2 x \ln(x) dx$.

Lösn. Partiell integration ger $\int_1^2 x \ln(x) dx = [\frac{x^2}{2} \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$.

3. Beräkna integralen $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.

Lösn. Låt $u(x) = 1 + x^2$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$, $du = 2x dx$. Vi får $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{\ln(2)}{2}$.

4. Beräkna interalen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Lösn. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_c^1 = 2$.

5. Beräkna volymen av den torus som bildas då en cirkel med centrum i punkten $(0, 3)$ och radie 1 roterar runt x -axeln.

Lösn. Pappus sats ger $V = 2\pi \cdot 3 \cdot \pi = 6\pi^2$.

6. Använd trapetsregeln med tre lika långa delintervall för att approximera $\int_0^1 1 - x^2 dx$.

Lösn. $T_3 = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9}) = \frac{35}{54}$.

7. Beräkna y -koordinaten av centroiden (alltså \bar{y}) för det område som begränsas av $x = 0$, $x = \pi$, $f(x) = \sin(x)$ och x -axeln.

Lösn. $m = \int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$ och $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} [\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}]_0^\pi = \frac{\pi}{4}$. Vi får $\bar{y} = M_{y=0}/m = \frac{\pi}{8}$. /axel