MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Olof Giselsson tel. 031–7725325

TMV151
2017–04–10 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Olof Giselsson tel. 031–7725325

TMV151
2017–04–10 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Beräkna den undre Riemann summan av funktionen $f(x) = x^2$ mellan $x = -1$ och $x = 1$ med 4 delintervall. (3p)
Lösn. $U(f, \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}) = \frac{1}{2}((-\frac{1}{2})^2 + 0^2 + 0^2 + (\frac{1}{2})^2) = \mathbf{\frac{1}{4}}$.

2. Beräkna $\int_0^1 x \sin(x^2)\, dx$. (3p)
Lösn. $\int_0^1 x\sin(x^2)\, dx = \{y = x^2\} = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(y)\, dy = \mathbf{\frac{1}{2}(1 - \cos(1))}$.

3. Beräkna $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$. (3p)
Lösn. $\int_0^1 x^2e^x\, dx = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\, dx = e - 2[xe^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x\, dx = -e + 2(e-1) = \mathbf{e - 2}$.

4. Beräkna $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+3)}\, dx$. (3p)
Lösn. Partialbråksuppdelning ger $\frac{2}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$. Vi får $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+3)}\, dx = \frac{1}{2}[\log(x+1) - \log(x+3)]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}\log(\frac{3}{2})}$.

5. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området i xy-planet som begränsas av funktionerna $y = e^x$ och $y = e$ roterar runt y-axeln. (3p)
Lösn. $V = \int_0^1 2\pi x(e - e^x)\, dx = \pi e - 2\pi([xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx) = \pi e - 2\pi e + 2\pi(e-1) = \pi(\mathbf{e - 2})$.

6. Lös differentialekvationen $y'(x) = xy^2$ med begynnelsevillkoret $y(1) = 2$. (3p)
Lösn. Variabelseparation ger $-y^{-1} = \int \frac{dy}{y^2} = \frac{x^2}{2} + C'$. Däreför $y(x) = \frac{2}{-C - x^2}$. $y(1) = 2$ medför $C = -2$ alltså $y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$.

7. Lös differentialekvationen $y'(x) + xy(x) = x$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 2$. (3p)
Lösn. Integrerande faktorn $e^{\frac{x^2}{2}}$ multipliceras på båda sidor, $y(x) = e^{-x^2/2}\int xe^{x^2/2}\, dx = 1 + Ce^{-x^2/2}$. Begynnelsevillkoret ger $C = 1$ alltså $y(x) = 1 + e^{-x^2/2}$.

8. Lös differentialekvationen $y''(x) + 4y'(x) - 5y(x) = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (3p)
Lösn. Karaktäristiska ekvationen blir $r^2 + 4r - 5 = (r-1)(r+5) = 0$. Den allmänna lösningen ges av $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-5x}$. Begynnelsedata ger $y(x) = \frac{5e^x + e^{-5x}}{6}$.

9. Studera ekvationen $y'(x) = y(x)$, med begynnelsevillkor $y(0) = 1$. Vad blir Framåt Euler approximationen av $y(1)$ givet att intervallet $[0, 1]$ delas in i n lika stora delintervall? (3p)
Lösn. $y_n = (1 + \frac{1}{n})y_{n-1} = (1 + \frac{1}{n})^n y_0 = \mathbf{(1 + \frac{1}{n})^n}$.

10. Beräkna Laplace transformen av $f(t) = \sin(2t)$. (3p)
Lösn. $\sin(2t) = \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}$. $\mathcal{L}[e^{rt}](s) = \int_0^\infty e^{(r-s)t}\, dt = \frac{1}{s-r}$. Vi får $F(s) = \frac{1}{2i}(\frac{1}{s-2i} - \frac{1}{s+2i}) = \mathbf{\frac{2}{s^2+4}}$.

---

11. Studera begynnelsevärdesproblemet $y'''(t) + y'(t) = \sin(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. Skriv som ett system av första ordningen ODE. Ange en numerisk metod som kan användas för att lösa ekvationen samt metodens konvergensordning. (5p)
Lösn. Låt $y_1 = y$, $y_2 = y'$ och $y_3 = y''$.

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \sin(t) - y_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Systemet kan lösas med text Bakåt Euler som är en första ordningens metod, alltså felet beror linjärt på steglängden.

12. Skriv en Matlab rutin som utför 10 steg av Framåt Euler för ekvationen $y'(t) + y(t)^2 = \cos(t)$, $y(1) = 1$ med steglängd $h = 0.1$. (5p)
Lösn.

```
y = 1; t = 1; h=0.1;
while t < 2
  y = y + h*(cos(t)-y^2);
  t = t + 0.1;
end
```

13. Formulera och bevisa satsen om triangelns centroid. (5p)
Lösn. See Adams/Essex sidan 419.

14. Låt $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ där f är en kontinuerlig funktion. Låt vidare $T_n \approx I$ vara approximationen med trapetsmetoden och $M_n \approx I$ vara approximationen med mittpunktmetoden på n lika långa delintervall ($x_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$). Härled ett uttryck för approximationen med Simpsons formel med $2n$ delintervall $S_{2n} \approx I$ i termer av T_n och M_n. Vilken konvergensordning har Simpsons formel? (5p)
Lösn. Låt $x_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$ och $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})/n$, $i = 0, \dots, n-1$. Vidare låter vi $y_j = f(x_j)$. Då gäller $T_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n)$ och $M_n = \frac{1}{n}(y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}})$. Samtidigt gäller att,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{3} \cdot (y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{1+\frac{1}{2}} + ... + 4y_{n-\frac{1}{2}} + y_n) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}(y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{T_n + 2M_n}{3}. \end{aligned}$$

Konvergensordningen är 4.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Olof Giselsson tel. 031–7725325

TMV151
2017–04–10 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		