MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Axel Målqvist tel. 031–7723599

TMV151
2018–01–11 kl. 14.00–18.00 (H)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Studera denna Matlabkod: (3p)

```
i = 0; S = 0; n = 100;
while i < n
  i = i + 1;
  S = S + i;
end
```

Vilket värde får variabeln S?
Lösn. $S = \sum_{i=1}^{100} i = 5050$.

2. Bestäm $\int_0^1 x\cos(x^2+1)\,dx$. (3p)
Lösn. Substitution $u = x^2+1$. Vi får $\int_0^1 x\cos(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \cos(u)\,du = \frac{1}{2}(\sin(2) - \sin(1))$.

3. Bestäm $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$. (3p)
Lösn. Partiell integration ger, $\int_0^1 x\sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)\,dx = -\cos(1) + [\sin(x)]_0^1 = \sin(1) - \cos(1)$.

4. Bestäm $\int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx$. (3p)
Lösn. Vi har att $x^2+6x+5 = (x+1)(x+5)$. Partialbråksuppdelning ger $\frac{1}{x^2+6x+5} = \frac{1/4}{x+1} - \frac{1/4}{x+5}$. Vi får $\int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = \frac{1}{4}[\ln(x+1) - \ln(x+5)]_0^1 = \frac{1}{4}(\ln(2) + \ln(5) - \ln(6))$.

5. Ange alla p sådana att $\int_1^\infty x^{-2p}\,dx$ är konvergent. (3p)
Lösn. Sats 6.2 ger $p > \frac{1}{2}$.

6. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då triangeln med hörn i $(1,1)$, $(3,1)$ och $(2,3)$ roterar kring x-axeln. (3p)
Lösn. Centroiden är medelvärdet av hörnkoordinaterna $(\bar{x},\bar{y}) = (2, \frac{5}{3})$. Kortaste avståndet till x-axeln $\frac{5}{3}$. Arean är 2. Pappus sats ger $V = 2\pi\frac{5}{3}2 = \frac{20\pi}{3}$.

7. Lös differentialekvationen $y'(x) + x^2y(x) = 2x^2$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 2$. (3p)
Lösn. Multiplicera med integrerande faktor $e^{x^3/3}$ och bestäm primitiv på båda sidor. Vi får $y(x)e^{x^3/3} = 2e^{x^3/3} + C$. Konstanten bestäms av begynnelsevillkoret till $C = 0$. Vi får $y(x) = 2$.

8. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$ och $[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$. (3p)
Lösn. Algebraisk och geometrisk skalärprodukt ger $1 = 1\sqrt{4}\cos(\theta)$. Vinkeln blir $\theta = \frac{\pi}{3}$.

9. Bestäm tyngdpunkten för en formation av sex identiska flygplan, som var och en har sin tyngdpunkt i punkterna $(-2,0)$, $(-1,2)$, $(0,-1)$, $(0,4)$, $(1,2)$ respektive $(2,0)$. (3p)
Lösn. Symmetri ger $\bar{x} = 0$. Låt massan vara m. Momentet kring $y = 0$ ges av $M_{y=0} = m(0+2-1+4+2+0) = 7m$. Den totala massan ges av $6m$. Därför får vi $\bar{y} = \frac{7}{6}$.

10. Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = t^2$ (väldefinierad för $Re(s) > 0$). (3p)

Lösn. Partiell integration två gånger $\int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt = [t^2 \frac{e^{-st}}{-s}]_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}\,dt = -\frac{2}{s^2}[te^{-st}]_0^\infty + \frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{2}{s^3}[e^{-st}]_0^\infty = \frac{2}{s^3}$, om $Re(s) > 0$ är alla integraler är konvergenta.

---

11. Studera begynnelsevärdesproblemet $y'''(t) - y(t)^2 = 1 + t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. Skriv som ett system av första ordningen ODE. Utför ett steg med Eulers metod med steglängd $k = 0.1$. (5p)

Lösn. Låt $y_1 = y$, $y_2 = y'$ och $y_3 = y''$.

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1^2 + 1 + t^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med $t_n = nk$, $n = 0, 1, \ldots$, ger Eulers metod:

$$\begin{bmatrix} y_1^n - y_1^{n-1} \\ y_2^n - y_2^{n-1} \\ y_3^n - y_3^{n-1} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} y_2^{n-1} \\ y_3^{n-1} \\ (y_1^{n-1})^2 + 1 + t_{n-1}^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} (y_1)_0 \\ (y_2)_0 \\ (y_3)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får $y_1^1 = 1$, $y_2^1 = 0$ och $y_3^1 = 0.2$.

12. Formulera och bevisa satsen som anger under vilka antaganden en funktion $f(t)$ har en väldefinierad Laplacetransform. (5p)

Lösn. Se Sats AM3.1 i anteckningar i matematik.

13. Bestäm lösningen till $y''(x) = (y'(x))^2$ med begynnelsevillkor $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. (5p)

Lösn. Låt $v(x) = y'(x)$. Vi får $v' = v^2$ som är separabel. Vi får $\int \frac{1}{v^2}\,dv = \int 1\,dx = x + C$. Vi får $-1/v(x) = x + C$. Begynnelsevillkoret ger $v(0) = 1$ vilket ger $C = -1$. Vi får $v(x) = \frac{1}{1-x}$. Därför får vi $y(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + C$. Begynnelsevillkoret ger $0 = y(0) = C$. Vi får $y(x) = -\ln(1-x)$.

14. Skriv en Matlabkod som beräknar en approximation $S_n \approx \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ med Simpsons formel med $n = 10$ lika långa delintervall. (5p)

Lösn.

```
i = 0; S = 0; n = 10; h= 1/n;
while i < n
  dS = h/6*(1/(1+(i*h)^2)+4/(1+(i*h+h/2)^2)+1/(1+(i*h+h)^2));
  S = S + dS;
  i = i + 1;
end
```

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Axel Målqvist tel. 031–7723599

TMV151
2018–01–11 kl. 14.00–18.00 (H)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	**Svar**	**Poäng**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		