MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, tel. 031–7725325

TMV151
2018–04–04 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}$. (3p)
Lösn. Vi har att $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$ vilket innebär att gränsvärdet blir $\frac{1}{2}$.

2. Bestäm $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$. (3p)
Lösn. Variabelsubstitution $u = 4-x^2$. Vi får $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_4^0 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_0^4 = \frac{8}{3}$.

3. Bestäm en approximation till integralen $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ med mittpunktsmetoden. Använd trvådelintervall. (3p)
Lösn. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{2}(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}) = \frac{24}{35}$.

4. För vilka p är $\int_1^\infty x^p\,dx$ konvergent? (3p)
Lösn. Satsen om p integraler ger $p < -1$.

5. Bestäm volymen hos den kropp som bildas då området som begränsas av $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$ mellan $x = 0$ och $x = 1$ roterar runt x-axeln. (3p)
Lösn. $V = \pi\int_0^1 (x^{1/2} - x^2)^2\,dx = \pi(\frac{1}{2} - \frac{4}{7} + \frac{1}{5}) = \frac{9\pi}{70}$.

6. Lös differentialekvationen $y'(x) = y(x)^2$ med $y(0) = 1$. (3p)
Lösn. Variabelseparation ger $-y^{-1} = \int y^{-2}\,dy = 1\,dx = x + C$. $y(0) = 1$ ger $C = -1$. Vi får $y(x) = \frac{1}{1-x}$.

7. Lös differentialekvationen $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (3p)
Lösn. Karaktäristiska ekvationen har rötter $r_{1,2} = 1$. Dubbelrot innebär att lösningen ges av $y(x) = (A + Bx)e^x$. $y(0) = 0$ ger $A = 0$ och $y'(0) = 1$ ger $B = 1$. Vi får $y(x) = xe^x$.

8. Bestäm centroiden av det område i planet som begränsas av $y = 1 - x^2$ och $y = 0$. (3p)
Lösn. Symmetri ger $\bar{x} = 0$. $M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-x^2)^2\,dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4\,dx = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ och $m = \int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx = \frac{4}{3}$ varför $\bar{y} = \frac{2}{5}$.

9. Två punktmassor, var och en med vikten m, ligger i $(0,0)$ respektive $(1,0)$. Hur tung punktmassa måste placeras i punkten $(0,1)$ för att den sammalagda tyngpunktens y-koordinat ska bli lika med 0.8? (3p)
Lösn. Låt massan i $(0,1)$ vara M. $\bar{y} = \frac{M}{M+m} = 0.8$ med lösning $M = 8m$.

10. Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = \sin(t)$ (som är väldefinierad för $\mathrm{Re}(s) > 0$). (3p)
Lösn. $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$, se anteckningar.

---

11. Skriv en Matlab rutin `riemann.m` som beräknar den undre Riemannsumman av funktionen $f(x) = 1 + \sin(x)$ mellan $x = 0$ och $x = \frac{\pi}{2}$ med n delintervall. (5p)
Lösn. Vi noterar att $1 + \sin(x)$ är växande på intervallet.

```
function S=riemann(n)
x = 0; S = 0; h=pi/(2*n);
while x < pi/2
  dS = h*(1+sin(x));
  x = x + h;
  S = S + dS;
end
```

12. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (5p)
Lösn. Se Adams/Essex Sats 5.4.

13. Ge en rekursionsformel som uttrycker $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ i termer av I_{n-1} och bestäm I_4. (5p)
Lösn. $I_0 = 1-e^{-1}$ och partiell integration ger $I_n = -e^{-1}+nI_{n-1}$. Därför $I_1 = -e^{-1}+I_0 = 1-2e^{-1}$, $I_2 = -e^{-1}+2I_1 = 2-5e^{-1}$ och $I_3 = -e^{-1}+3I_2 = 6-16e^{-1}$.

14. Skriv som system av första ordningen och genomför en iteration av framåt Euler metoden för differentialekvationen $y''(x)+y(x)^2 = x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, med steglängd $h = 0.1$. (5p)
Lösn. Vi låter $y_1 = y$ och $y_2 = y'$. Systemet blir då:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ x^2 - y_1^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med $x_n = 1+nh$, $n = 0,1,\ldots$, ges Framåt Euler lösningen av:

$$\begin{bmatrix} y_1^{n+1} - y_1^n \\ y_2^{n+1} - y_2^n \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} y_2^n \\ (x_n)^2 - (y_1^n)^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Därför får vi

$$\begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, tel. 031–7725325

TMV151
2018–04–04 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		