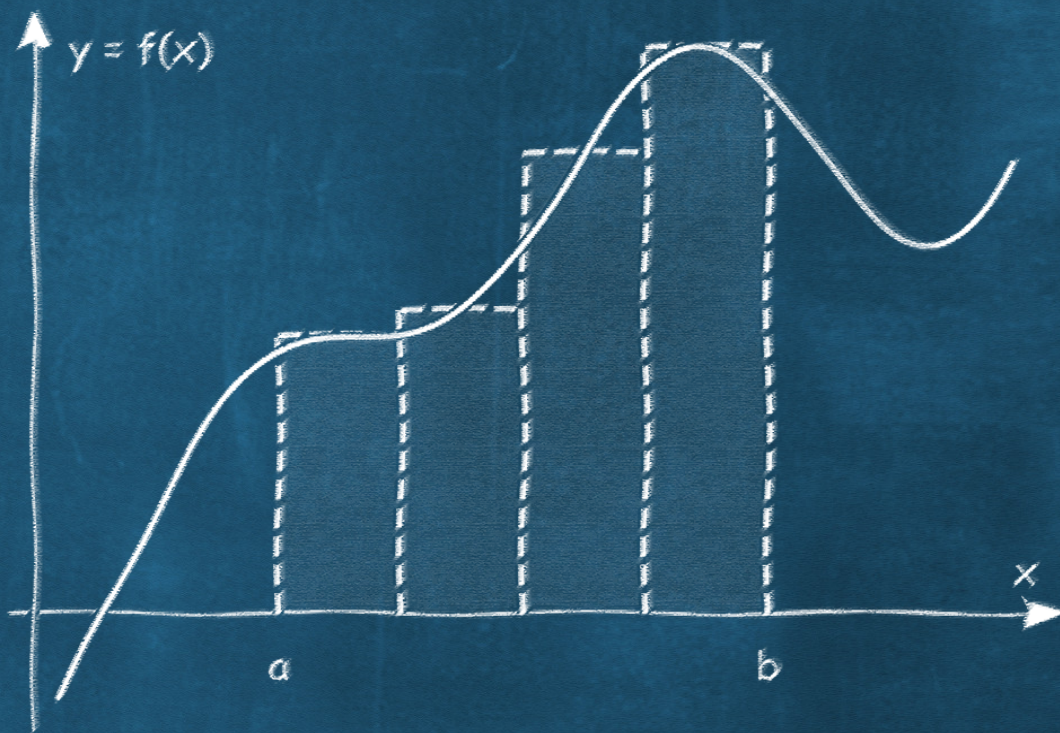


# MATEMATISK ANALYS & LINJÄR ALGEBRA



## DEL II: INTEGRALKALKYL

STIG LARSSON, ANDERS LOGG & AXEL MÅLQVIST

*Utkast från 17 december 2018*

Copyright © 2018 Stig Larsson, Anders Logg & Axel Målqvist

Kopiering förbjuden

Detta verk är skyddat av lagen om upphovsrätt. Ingen del av detta verk får reproduceras eller kopieras utan rättighetsinnehavarens skriftliga medgivande.

Art. No xxxxx

ISBN xxx-xx-xxxx-xx-x

Utgåva o.o

Omslagsdesign av Anders Logg

Publicerad av Chalmers tekniska högskola

Tryckt i Göteborg

# Innehåll

0	Ekvationen $u' = f$ .....	1
0.1	Integralen	1
0.2	Ordinära differentialekvationer	2
0.3	Numeriska metoder	3
1	Integralen .....	4
1.1	Area som gränsvärde av summor	4
1.2	Riemann-summor	7
1.3	Definition av integralen	9
1.4	Medelvärdessatsen	14
1.5	Analysens fundamentalsats	15
1.6	Generaliserade integraler	18
2	Integrationstekniker .....	26
2.1	Variabelsubstitution och partiell integration	26
2.2	Integration av rationella funktioner	30
2.3	Båglängd, area och volym	32
2.4	Rotationskroppar	36
2.5	Numeriska metoder	38
2.6	Konvergens av numeriska approximationer	42
3	Ordinära differentialekvationer .....	49
3.1	Introduktion till differentialekvationer	49
3.2	Existens och entydighet	51
3.3	Första ordningens ODE	55
3.4	Andra ordningens ODE	59
3.5	Linjära ODE	61
3.6	Analytiska lösningar till andra ordningens ODE	63
4	Laplacetransform .....	72
4.1	Definition av Laplacetransform	72

4.2	Skalning	75
4.3	Laplacetransform av derivator och integraler	76
4.4	Fältning	79
4.5	Impulser och diskontinuerliga funktioner	80
4.6	Lösning av begynnelsevärdesproblem	83
<b>5</b>	<b>System av ODE</b>	<b>91</b>
5.1	Introduktion till linjär algebra	91
5.2	System av första ordningens ODE	96
5.3	Högre ordningens ODE	99
5.4	Existens och entydighet av lösning	101
5.5	Alternativ definition av $\exp(x)$ och $\ln(x)$	104
5.6	Alternativ definition av $\cos(x)$ och $\sin(x)$	107
<b>6</b>	<b>Numerisk lösning av ODE</b>	<b>116</b>
6.1	Numeriska metoder	116
6.2	Konvergens	119
6.3	Stabilitet	121
6.4	Algoritmer	123
6.5	Generalisering till system av ODE	126
6.6	Randvärdesproblem	128
<b>7</b>	<b>Tillämpningar</b>	<b>135</b>
7.1	Tyngdpunkt	135
7.2	Mekaniska system	138
7.3	Solsystemet	138
	Appendix A: Grekiska alfabetet	140
	Appendix B: Programmering	141
	Facit	144
	Litteratur	178

## Förord och läsanvisningar

---

*Denna version av boken är ett preliminärt utkast från 17 december 2018. Boken förväntas vara färdigställd hösten 2019. Synpunkter på materialet och korrekationer av eventuella tryckfel mottages tacksamt på email till [axel@chalmers.se](mailto:axel@chalmers.se).*



Denna bok ger en introduktion till matematisk analys och linjär algebra för teknisk högskola. Boken bygger på föreläsninganteckningar från kurser vi föreläst på maskinprogrammet på Chalmers och vår ambition har varit att skriva en bok som ger en koncis och lättillgänglig men samtidigt rigorös beskrivning av det matematiska teoribygget, med tydliga kopplingar till modellering, beräkning, algoritmer och programmering.

Vår ambition har också varit att ge studenten en bok som kan läsas från pärm till pärm, istället för en tegelsten sprängfylld med exempel och utvecklingar; därav det kompakta formatet och det relativt sparsamma utrymme som ges åt lösta exempel.

Boken är strukturerad i fyra delar, med avsikt att varje del kan läsas som en 7,5 poängskurs. Varje del är i sin tur indelad i åtta kapitel, ett kapitel för vardera av Chalmers åtta läsveckor. De olika delarnas teman motiveras utifrån *ekvationslösning* som är ett centralt verktyg inom modellering och problemlösning i naturvetenskaperna och ingenjörskonsten. Upplägget kan därför sägas vara *problemmotiverat*. Varje del motiveras utifrån vår vilja att kunna lösa en viss klass av ekvationer:  $f(x) = 0$  (skalära ickelinjära ekvationer; del I),  $u' = f$  (integraler och ordinära differentialekvationer; del II),  $Ax = b$  (system av linjära ekvationer; del III) och  $A(u) = f$  (system av ickelinjära partiella differentialekvationer; del IV). Dessa teman bildar en röd tråd som löper genom texten, men notera att även om upplägget är problemmotiverat så är det *inte* problembaserat. Texten följer istället en traditionellt matematisk beskrivning med definition, sats och bevis. Den som så önskar kan därför välja att istället tänka på bokens olika delar som differentialkalkyl (del I), integralkalkyl (del II), linjär algebra (del III) och flervariabelanalys (del IV).

Bokens övningsuppgifter är indelade i “Övningar” och “Problem”. Övningarna standarduppgifter på specifika teman och avsedda för kunskapskontroll och mängdträning, medan problemen kombinerar olika teman och kan kräva mer eftertanke.

Bevis märkta med ★ är av lite mer utmanande karaktär och ingår normalt inte i en standardkurs för godkänt betyg. I övrigt är rekommendationen att läsa (och förstå!) boken i sin helhet och att arbeta flitigt med bokens övningar och problem. En lämplig omfattning kan vara att göra hälften av alla uppgifter; gör alla övningsuppgifter märkta (a) och (b) samt alla udda problem. Resterande uppgifter kan fungera som extra träning eller repetitionsmaterial inför tentamen.

*Lycka till!*

Författarna  
Göteborg, 17 december 2018

## Tack!

---

Stort tack till de många studenter, övningsledare och kollegor som har läst, kommenterat och korrigerat tidiga utkast av boken. Speciellt tack till Per Ljung för korrekturläsning och till Joar Axås, Christoffer Hansson och Felix Held som bidragit med många av bokens övningsuppgifter.

# 0. Ekvationen $u' = f$

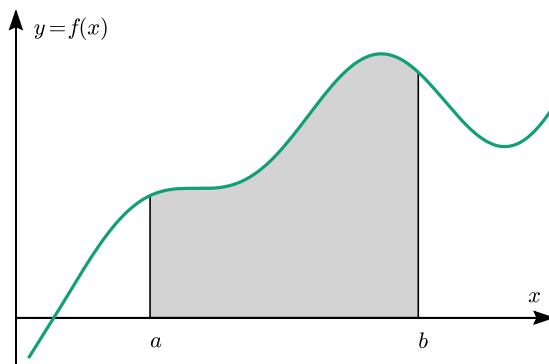
0.1	Integralen	1
0.2	Ordinära differentialekvationer	2
0.3	Numeriska metoder	3

*Denna bok kan sägas handla om att lösa ekvationen  $u' = f$ . Om  $f$  är oberoende av  $u$  så innebär det att vi söker primitivfunktionen eller integralen av  $f$ . Integralen är, tillsammans med derivatan, analysens grundpelare och används för att bestämma areor, volymer, flöden, sannolikheter och mycket annat. Om  $f$  beror på  $u$  blir  $u' = f(u)$  en ordinär differentialekvation (ODE). ODE beskriver också en stor mängd viktiga tillämpningar som planeternas banor och mekaniska system. Vi studerar både analytiska och numeriska lösningstekniker för integraler och ODE.*

## 0.1 Integralen

---

Arean av geometriska former som trianglar och rektanglar ges av enkla formler, basen gånger höjden för rektangeln och basen gången höjden genom två för triangeln, men hur bestämmer man arean av ett område definierat av godtyckliga funktioner som i figur 1? Denna fråga är central i de två första kapitlen i boken. Vi



Figur 1: Integralen av en funktion  $f(x)$  mellan  $x = a$  och  $x = b$  ger arean av den markerade ytan.

approximerar ett områdes area med hjälp av en summa av rektangelareor med finare och finare indelningar. Dessa summor kallas Riemann-summor och konvergerar i gräns mot områdets area. Riemann-summorna leder oss till integralbegreppet och vidare till dess koppling till derivatan. Analysens fundamentalsats visar nämligen att integralen kan ses som derivatans invers. Bestämningen av integralen av en funktion  $f$  kan därför göras genom att beräkna primitivfunktionen av  $f$  eller uttryckt med formler, lösa ekvationen  $u' = f$ .

I kapitel 1 och 2 studerar vi vilka funktioner  $f$  som låter sig integreras, integralens egenskaper samt tekniker för att bestämma primitivfunktioner. Det visar sig nämligen vara mer utmanande att bestämma primitivfunktion av en given funktion än att bestämma funktionens derivata. Vidare kommer vi studera hur integralen kan användas för att bestämma volymen hos en rotationskropp, tyngdpunkt, kurvors längd och ytors area.

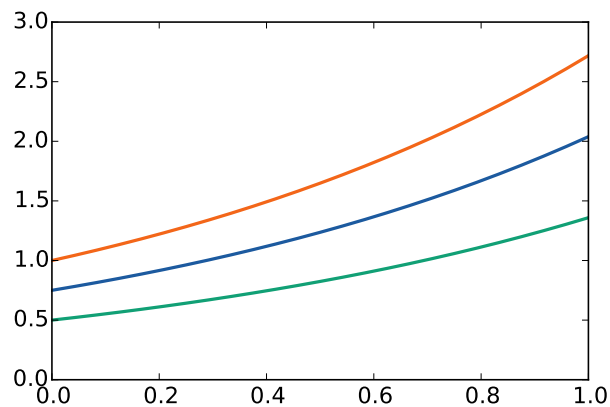
## 0.2 Ordinära differentialekvationer

---

Det andra stora området som vi studerar i denna bok är ordinära differentialekvationer (ODE). ODE är ekvationer där lösningen är en funktion  $u$  av en variabel  $t$  och där derivator av lösningen ingår, till exempel

$$u'(t) = u(t). \quad (1)$$

Många fenomen i naturen beskrivs matematiskt av differentialekvationer, till exempel, populationer i ekosystem, planeternas banor, mekaniska system och elektriska kretsar. Variabeln  $t$  är i många tillämpningar tiden. I sådana system beskriver lösningen  $u(t)$  systemets evolution givet ett start- eller begynnelsevärde  $u(0)$ . I figur 2 ser vi lösningen till ekvation (1) med tre olika begynnelsevärden. I kapitel 3-5 studerar vi un-



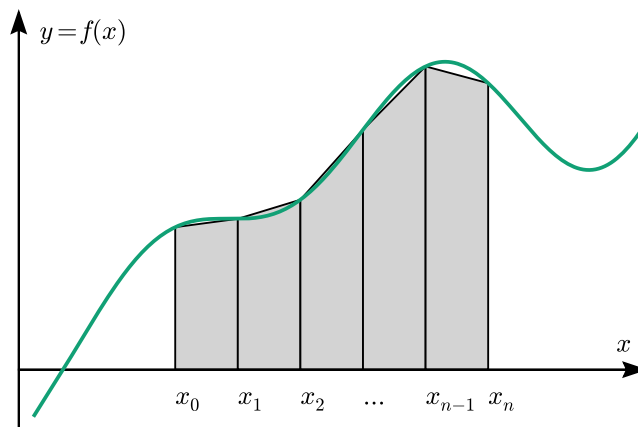
Figur 2: Den ordinära differentialekvationen  $u'(t) = u(t)$  löst med tre olika begynnelsevärden  $u(0) = 0.5, 0.75, 1$ .

der vilka förutsättningar ODE har unik lösning, hur man bestämmer lösningen med analytiska tekniker och även hur man kan lösa system av flera kopplade ODE.



### 0.3 Numeriska metoder

Många integraler och ODE låter sig inte lösas med analytiska metoder. I sådana fall krävs numeriska metoder. Dessa är generellt användbara men ger approximativa lösningar. De bygger på en indelning av intervallet som integralen ska beräknas över eller tidsintervallet för vilket ODE ska lösas, i små delintervall. På varje delintervall beräknas en approximation av lösningen. I fallet med integralen kan till exempel integralen på ett litet intervall approximeras av funktionens värde i mittpunkten gånger intervallets längd eller som i figur 3 en fyrhörning (trapets) definierad av intervallet och funktionens värde i ändpunkterna. För



Figur 3: Trapetsmetoden för approximation av integralen av en funktion  $f$  mellan  $x_0 = a$  och  $x_n = b$ .

ODE approximeras derivatan med en differenskvot och funktionen evalueras i en punkt på intervallet. De numeriska metoderna är inte exakta men vi kommer att visa att de konvergerar mot rätt lösning när intervallens längd går mot noll. Dessutom kommer vi se hur felet i approximationen beror på intervallängden. Numeriska metoder för att beräkna integraler behandlas i slutet av kapitel 2 och numeriska metoder för ODE i kapitel 6. Numeriska metoder är generella och låter oss studera komplicerade tillämpningar som att förutsäga planeternas rörelse i vårt solsystem. Vi återkommer till detta i kapitel 7.

# 1. Integralen

1.1	Area som gränsvärde av summor	4
1.2	Riemann-summor	7
1.3	Definition av integralen	9
1.4	Medelvärdessatsen	14
1.5	Analysens fundamentalsats	15
1.6	Generaliserade integraler	18

*I detta kapitel introducerar vi integralen som, tillsammans med derivatan, är den matematiska analysens grundpelare. Med hjälp av integralen kan vi bestämma arean av områden i planet som begränsas av kurvor. Detta är ett centralt problem inom den matematiska analysen. Vi kommer också se att arean under en funktion (integralen) har en nära koppling till tangenten (derivatan) av funktionen, genom analysens fundamentalsats. Integralen används, förutom för att bestämma areor, även för att bestämma volymer, massa, moment, flöden och mycket annat.*

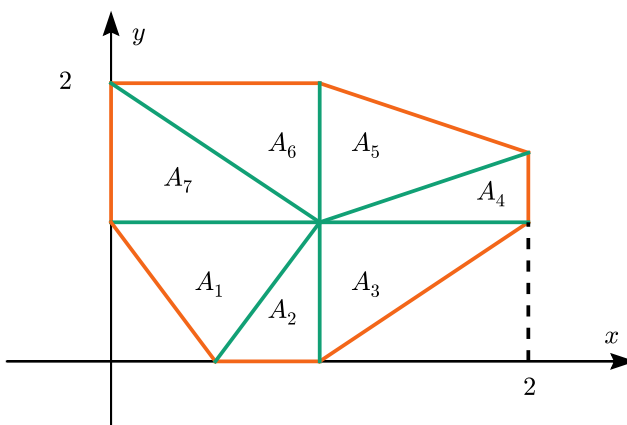
## 1.1 Area som gränsvärde av summor

Vi kan bestämma arean av områden som begränsas av räta linjer (polygonområden), så som rektanglar och trianglar, med hjälp av kända formler. Arealen ges av basen gånger höjden för rektangeln och basen gånger höjden genom två för triangeln. Eftersom polygonområden kan delas upp i ändligt många trianglar kan vi även bestämma arean av sådana som ändliga summor av trianglareor.

**Exempel 1.1** I figur 1.1 ser vi ett polygonområde som är uppdelat i sju trianglar. Arealen av de enskilda trianglarna kan bestämmas som basen gånger höjden genom två vilket ger  $A_1 = \frac{1}{2}$ ,  $A_2 = \frac{1}{4}$ ,  $A_3 = \frac{1}{2}$ ,  $A_4 = \frac{1}{4}$ ,  $A_5 = \frac{1}{2}$ ,  $A_6 = \frac{1}{2}$  och  $A_7 = \frac{1}{2}$ . Den sammanlagda arean blir  $A = \sum_{i=1}^7 A_i = 3$ .

För områden som avgränsas av mer komplicerade kurvor kan vi inte längre använda ändliga summor av enkla former, som rektanglar och trianglar, för att bestämma arean. Däremot kan vi komma godtyckligt nära arean av området genom att approximera med ändligt många enkla former. Ju finare indelning som används ju närmare kommer vi. Arealen ges därför som ett gränsvärde av approximationer.

En stor klass ytor i planet kan beskrivas som skillnaden mellan två områden som var och en ligger mellan en given kurva och  $x$ -axeln. I figur 1.2 ser vi funktionerna  $f(x)$  och  $g(x)$ . Arealen mellan kurvorna (mörkgrå) ges av arean mellan  $f(x)$  och 0 (mörk- och ljusgrå) minus arean mellan  $g(x)$  och 0 för  $x \in [a, b]$ . Det är därför naturligt att studera arean mellan en given funktion och  $x$ -axeln och även tillåta negativa värden då



Figur 1.1: Indelning av polygonområde i trianglar.

$f(x) < 0$ . Vi låter  $f(x)$  vara en given funktion definierad för  $x \in [a, b]$ . Areal (med tecken) mellan en funktion  $f(x)$  och  $x$ -axeln från en punkt  $x = a$  till  $x = b$  kan approximeras genom att dela in intervallet  $[a, b]$  i delintervall och på varje delintervall beräkna arean av en rektangel med höjd given av funktionen  $f(x)$ . I figur 1.3 illustrerar vi denna teknik för funktionen  $f(x) = \sin(x)$  med  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$  och 8 delintervall. I detta fall är det mittpunkten i varje delintervall som används för att approximera funktionens värde. Vi ger två exempel på hur arean kan bestämmas.

**Exempel 1.2 (Areal under sinus)** Vi börjar med exemplet i figur 1.3. Vi låter  $f(x) = \sin(x)$  och  $x \in [0, 2\pi]$ . Vi delar in intervallet i  $n$  lika stora delar där  $n = 2m$  är jämnt,  $\Delta x_i = \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{m}$ . Vi evaluerar  $f$  i mittpunkten på varje intervall och får

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2\pi(i - \frac{1}{2})}{n}\right) \frac{2\pi}{n} \quad (1.1)$$

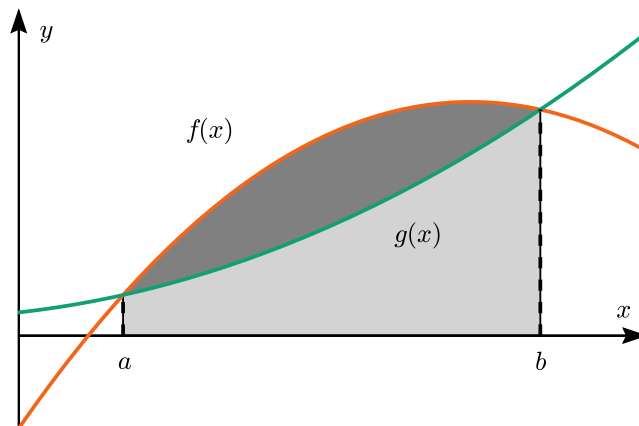
$$= \frac{\pi}{m} \sum_{i=1}^m \sin\left(\frac{\pi(2i - 1)}{2m}\right) + \frac{\pi}{m} \sum_{i=m+1}^{2m} \sin\left(\frac{\pi(2i - 1)}{2m}\right) \quad (1.2)$$

$$= \frac{\pi}{m} \sum_{i=1}^m \left( \sin\left(\frac{\pi(2i - 1)}{2m}\right) + \sin\left(\frac{\pi(2i - 1)}{2m} + \pi\right) \right) \quad (1.3)$$

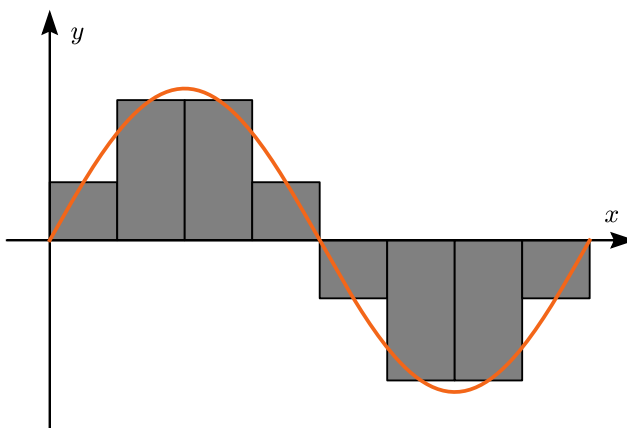
$$= 0, \quad (1.4)$$

eftersom  $\sin(x) = -\sin(x + \pi)$ . Detta resultat gäller för alla  $n$ .

**Exempel 1.3 (Areal under en linjär kurva)** Bestäm arean  $S$  av ytan som begränsas av  $f(x) = 2x$ ,  $x$ -axeln och  $x = 1$ . Vi delar in intervallet  $[0, 1]$  i  $n$  lika långa delintervall,  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ , där  $x_i = \frac{i}{n}$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Vi bestämmer nu ytan  $S_n$  av  $n$  rektanglar med bas  $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$  och höjden  $f(x_i) = 2x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , som är det högra funktionsvärdet på varje



Figur 1.2: Arean mellan två funktioner  $f(x)$  och  $g(x)$  ges av arean mellan  $f(x)$  och 0 minus arean mellan  $g(x)$  och 0.



Figur 1.3: Areaapproximation med 8 lika långa delintervall och evaluering av funktionen  $\sin(x)$  i mittpunkten på varje intervall.

intervall. I gräns blir resultatet detsamma oberoende av vilken punkt i intervallet som väljs. Vi får

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}, \quad (1.5)$$

eftersom  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ . Därför blir  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ .

För att kunna göra motsvarande uträkning för en kvadratisk funktion i nästa exempel behöver vi använda att  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Vi lämnar beviset av denna formel som en problemuppgift.

**Exempel 1.4 (Arean under en kvadratisk kurva)** Bestäm arean  $S$  av ytan som begränsas av  $f(x) = x^2$ ,  $x$ -axeln,  $y$ -axeln och  $x = 2$ . Vi delar in intervallet  $[0, 2]$  i  $n$  lika långa delintervall,  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2$ , där  $x_i = \frac{2i}{n}$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Vi bestämmer nu ytan  $S_n$  av  $n$  rektanglar med bas  $x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n}$  och höjd  $f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{2^2 i^2}{n^2} \frac{2}{n} = 8 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{8}{3} \left( 1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right). \quad (1.6)$$

Vi får att  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{8}{3}$ .

I första exemplet använder vi mittpunkten och i de båda andra väljer vi den högra ändpunkten på delintervallen när vi avgör rektangelns höjd. Detta val är alltså inte unikt. En godtycklig punkt i delintervallet kan användas. Vi noterar även att ju högre polynomgrad vi har desto mer komplicerad blir beräkningen av summans gränsvärde. Som tur är kommer definitionen av integralen och analysens fundamentalsats ge oss betydligt kraftfullare redskap för att bestämma areor under funktioner.

## 1.2 Riemann-summor

Vi har sett att bestämning av area under funktioner kan utföras med hjälp av summor på finare och finare uppdelningar av ett intervall. Vi ska nu presentera ett systematiskt sätt att utföra areabestämning. Vi börjar med att introducera en uppdelning av intervallet  $[a, b]$  i  $n$  delintervall.

**Definition 1.1 (Partition)** Låt  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  vara en uppsättning reella tal sådana att  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .  $P$  kallas en partition av intervallet  $[a, b]$  i  $n$  delintervall  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Vi låter  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , beteckna längden av delintervallen samt  $\Delta x = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ .

Låt oss studera en given funktion  $f$  på intervallet  $[a, b]$ . Vi vill bestämma arean med tecken mellan funktionen och  $x$ -axeln, mellan  $x = a$  och  $x = b$ . Det innebär att positiva funktionsvärden ger positiva bidrag till resultatet medan negativa värden ger negativa bidrag. Genom att approximera  $f$  på varje delintervall, med funktionens minimum respektive maximum, kan vi bestämma undre, respektive övre, gränser för arean under kurvan. Genom att förfina partitionen av  $[a, b]$  kan vi successivt närma oss arean nedifrån och uppifrån. Dessa summor kallas undre och övre Riemann-summor. Om summorna konvergerar mot samma sak definierar detta värde arean (med tecken) under kurvan.

Alla funktioner är dock inte kontinuerliga. Vi vill definiera Riemann-summor för en större klass funktioner, nämligen de begränsade funktionerna. Då måste vi ersätta minimum och maximum i konstruktionen med största undre begränsning och minsta övre begränsning. Sats 1.14 i del I säger att en begränsad mängd reella tal, i detta fall  $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ , har en minsta övre begränsning (och en största undre begränsning). Vi använder därför dessa begränsningar av funktionen  $f$  i definitionen av Riemann-summor.

**Definition 1.2 (Undre och övre Riemann-summa)** Låt  $P$  vara en partition av  $[a, b]$  i  $n$  delintervall och  $f(x)$  vara en begränsad funktion definierad på  $[a, b]$ . Vidare låt  $f_{\min}^i$  vara största undre begränsning och  $f_{\max}^i$  minsta övre begränsning till mängden  $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  så att  $f_{\min}^i \leq f(x) \leq f_{\max}^i$ , på delintervallet  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Vi definierar den undre  $I_{\min}(f, P)$  och övre  $I_{\max}(f, P)$  Riemann-summan av funktionen  $f$  med partitionen  $P$  som

$$I_{\min}(f, P) = \sum_{i=1}^n f_{\min}^i \Delta x_i, \quad (1.7)$$

$$I_{\max}(f, P) = \sum_{i=1}^n f_{\max}^i \Delta x_i. \quad (1.8)$$

Den undre Riemann-summan för en given funktion  $f$  med partition  $P$  är alltid mindre än den övre. Om partitionen utökas med fler och fler punkter kommer den undre Riemann-summan att växa (eller förbli densamma) medan den övre istället kommer att avta (eller förbli densamma). Om vi går i gräns och låter antal intervall i partitionen  $P$  gå mot oändligheten så att  $\Delta x$  går mot noll, konvergerar både den undre och den övre Riemann-summan. Om dessa gränsvärden sammanfaller är de lika med arean (med tecken) under funktionen  $f(x)$  på intervallet  $[a, b]$ .

**Exempel 1.5 (Undre och övre Riemann-summa)** Vi studerar funktionen  $f(x) = (x - 1)^2$  på intervallet  $0 \leq x \leq 2$ . Vi delar in intervallet i 8 lika stora delintervall och beräknar först den undre Riemannsumman. Eftersom minimum på varje intervall ska bestämmas noterar vi att funktionen är avtagande för  $x < 1$ . Alltså kommer minimum alltid vara i den högra ändpunkten på delintervallen för  $x < 1$ . För  $x > 1$  är funktionen växande, alltså antas minimum i den vänstra ändpunkten. Vi låter  $x_i = \frac{i}{4}$  för  $i = 0, \dots, 8$ , och får

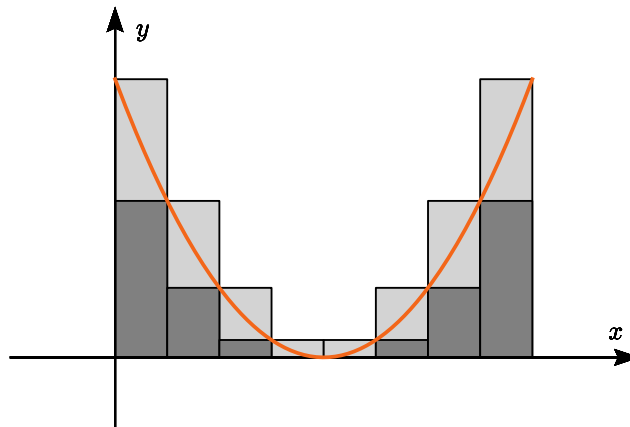
$$I_{\min} = \sum_{i=1}^8 \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \quad (1.9)$$

$$= \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^4 \left(\frac{i}{4} - 1\right)^2 + \sum_{i=5}^8 \left(\frac{i-1}{4} - 1\right)^2 \right) \quad (1.10)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{0}{4}\right)^2 \right) \quad (1.11)$$

$$= \frac{7}{16}. \quad (1.12)$$

Vi använder att grafen är symmetrisk runt  $x = 1$  vilket innebär att de två delsummorna måste vara



Figur 1.4: Mörkgrå representerar den undre Riemann-summan och mörk- och ljusgrå tillsammans representerar den övre Riemann-summan.

lika stora. För den övre Riemannsumman får vi med liknande resonemang

$$I_{\max} = \sum_{i=1}^8 \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \quad (1.13)$$

$$= \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^4 \left( \frac{i-1}{4} - 1 \right)^2 + \sum_{i=5}^8 \left( \frac{i}{4} - 1 \right)^2 \right) \quad (1.14)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{4}{4} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{2}{4} \right)^2 + \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right) \quad (1.15)$$

$$= \frac{15}{16}. \quad (1.16)$$

I figur 1.4 representeras den övre Riemann-summan av ljusgrå plus mörkgrå områden och den undre av de mörkgrå.

### 1.3 Definition av integralen

Vi är nu redo att definiera integralen av en funktion på ett givet intervall. Definitionen bygger på approximation med hjälp av övre och undre Riemann-summor. Eftersom vi definierar Riemann-summorna för begränsade funktioner kan vi även definiera integralen för begränsade funktioner.

**Definition 1.3 (Integralen)** Låt  $f(x)$  vara en begränsad funktion definierad på intervallet  $[a, b]$ . Vidare låt  $I_{\min}(f, P)$  och  $I_{\max}(f, P)$  vara undre och övre Riemann-summor med en partition  $P$  av  $[a, b]$ . Om det finns ett unikt tal  $I \in \mathbb{R}$  sådant att  $I_{\min}(f, P) \leq I \leq I_{\max}(f, P)$  för alla  $P$ , säger vi att  $f(x)$  är integrerbar på  $[a, b]$  och talet  $I$  är integralen av  $f$  på  $[a, b]$ . Vi skriver

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.17)$$

där  $a$  och  $b$  är integrationsgränser,  $f(x)$  integrand och  $dx$  differentialen av  $x$ .

Det är inte alltid enkelt att använda denna definition för att avgöra om en funktion är integrerbar. Följande sats ger ett annat villkor.

**Sats 1.1 (Integrerbarhet)** En begränsad funktion  $f$  är integrerbar på intervallet  $[a, b]$  om och endast om det för varje  $\epsilon > 0$  finns en partition  $P$  av  $[a, b]$  sådan att  $I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) < \epsilon$ .

*Bevis.* Vi antar först att det för varje  $\epsilon > 0$  finns (minst) en partition  $P$  av  $[a, b]$  sådan att  $I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) < \epsilon$ . Vi vill visa att det då kan finnas endast ett tal  $I$  som uppfyller  $I_{\min}(f, P') \leq I \leq I_{\max}(f, P')$  för alla partitioner  $P'$  av  $[a, b]$ . För att göra det antar vi motsatsen och visar att det leder till en motsägelse.

Om det finns två olika tal  $I_1 < I_2$  som uppfyller olikheten har vi att

$$I_2 - I_1 \leq I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) < \epsilon, \quad (1.18)$$

för varje  $\epsilon$ . Men eftersom det gäller för godtyckligt små  $\epsilon > 0$  måste  $I_2 - I_1 = 0$ . Alltså gäller  $I_1 = I_2$  och  $I = I_1 = I_2$  är därmed unik.

Åt andra hållet vill vi visa att om det endast finns ett  $I$  som uppfyller  $I_{\min}(f, P) \leq I \leq I_{\max}(f, P)$  så måste det för varje  $\epsilon > 0$  finnas en partition  $P$  som uppfyller  $I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) < \epsilon$ . Vi använder igen motsägelsebevis. Vi antar att det finns något  $\epsilon > 0$  sådant att  $I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) \geq \epsilon$  för alla  $P$ . Med då gäller även för  $I + \frac{\epsilon}{2}$  att  $I_{\min}(f, P) \leq I + \frac{\epsilon}{2} \leq I_{\max}(f, P)$  för alla  $P$  vilket motsäger att  $I$  är unik.  $\square$

Vi använder nu sats 1.1 för att avgöra om en funktion är integrerbar.

**Exempel 1.6 (Integrerbarhet)** Avgör om funktionen  $f(x) = 4x + 3$  är integrerbar på intervallet  $[0, 1]$ . Vi konstruerar  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  där  $x_i = \frac{i}{n}$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Minimum och maximum på  $[x_{i-1}, x_i]$  ges av  $f_{\min}^i = 4x_{i-1} + 3$  och  $f_{\max}^i = 4x_i + 3$  eftersom funktionen är växande. Vi låter

$$I_{\min}(f, P) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{4(i-1)}{n} + 3 \right) \frac{1}{n} = \frac{4n(n-1)}{2n^2} + 3 = 5 - \frac{2}{n} \quad (1.19)$$

och

$$I_{\max}(f, P) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{4i}{n} + 3 \right) \frac{1}{n} = \frac{4n(n+1)}{2n^2} + 3 = 5 + \frac{2}{n}. \quad (1.20)$$

Därmed gäller att  $I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) = \frac{4}{n}$ . Detta innebär att för varje  $\epsilon > 0$  finns ett  $n$  så att  $I_{\max} - I_{\min} < \epsilon$ . Alltså är funktionen integrerbar med integralen  $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 4x + 3 dx = 5$ .



Av detta exempel framgår att det krävs en del arbete för att avgöra om en funktion är integrerbar även med hjälp av sats 1.1. Följande sats visar att en stor klass av funktioner är integrerbara, nämligen de kontinuerliga funktionerna.

**Sats 1.2 (Kontinuerliga funktioner är integrerbara)** Om  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  så är  $f$  integrerbar på  $[a, b]$  och alla Riemann-summor  $I(f, P) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ , med partition  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  och godtyckliga evalueringspunkter  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , konvergerar

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{då} \quad \Delta x = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i \rightarrow 0.$$

*Bevis.* Vi börjar med integrerbarhet. Eftersom  $f(x)$  är kontinuerlig på det slutna intervallet  $[a, b]$  är funktionen likformigt kontinuerlig. Därför gäller för varje  $\epsilon > 0$  att det finns ett  $\delta > 0$  så att

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \quad (1.21)$$

för alla  $x, y \in [a, b]$  sådana att  $|x - y| < \delta$ . Vi kan då för ett fixt tillräckligt stort  $n \in \mathbb{N}$  konstruera en partition  $P$  av  $[a, b]$  sådan att

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad (1.22)$$

och  $\Delta x = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i < \delta$ , där  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Vi konstruerar den övre och undre Riemann-summan med partitionen  $P$  och får att

$$I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \epsilon. \quad (1.23)$$

Eftersom denna konstruktion kan göras för varje  $\epsilon > 0$  ger sats 1.1 att kontinuerliga funktioner på slutna intervall är integrerbara.

Vi går till konvergens av Riemann-summor. Konstruktionen ovan ger med samma partition  $P$  att

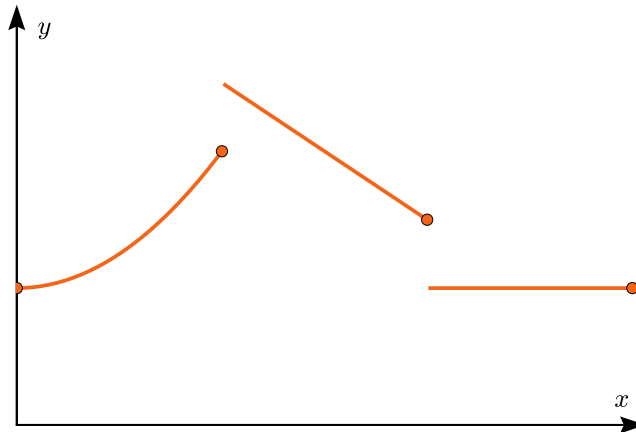
$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| \leq I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) < \epsilon,$$

för alla  $\epsilon > 0$ . Detta innebär att  $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x) dx$  då  $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ .  $\square$

Detta resultat kan utvidgas till funktioner som är kontinuerliga och begränsade på halvöppna intervall, till exempel  $(a, b]$ . Vi låter  $x_0 = a$  och  $x_1 = a + \frac{\epsilon}{4M}$  i partitionen  $P$  där  $M$  är begränsningen av  $f$ ,  $|f(x)| \leq M$ . I övrigt väljer vi punkter  $\{x_i\}_{i=1}^n$  så att  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ , för alla  $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$  och alla  $i = 2, \dots, n$ , vilket är möjligt eftersom  $f$  är likformigt kontinuerlig på  $[x_1, b]$ . Vi får då

$$I_{\max}(f, P) - I_{\min}(f, P) \leq \frac{2M\epsilon}{4M} + \sum_{j=2}^n \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta x_j < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad (1.24)$$

eftersom skillnaden mellan övre och undre begränsningen av  $f$  alltid är begränsad av  $2M$  på delintervallet  $[a, x_1]$  och  $\frac{\epsilon}{2(b-a)}$  på övriga delintervall. Eftersom funktioner som är begränsade och kontinuerliga på halvöppna intervall är integrerbara, gäller även att styckvis kontinuerliga funktioner är integrerbara eftersom



Figur 1.5: En styckvis kontinuerlig funktion.

de kan delas upp i funktioner som är kontinuerliga på halvöppna intervall. I figur 1.5 ser vi ett exempel på en styckvis kontinuerlig funktion som delats upp i en del som är kontinuerlig på ett slutet intervall och två som inte är det.

Det finns även funktioner som är begränsade men inte integrerbara. Det vanligaste exemplet är följande högst diskontinuerliga funktion.

**Exempel 1.7 (Begränsad men inte integrerbar)** Låt  $f$  vara funktionen definierad av

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} . \quad (1.25)$$

Vi vill avgöra om integralen  $\int_0^1 f(x) dx$  existerar. För varje partition  $P$  finns ett irrationellt tal i varje delintervall. Därför är den undre Riemann-summan för alla partitioner lika med 0. På samma sätt finns alltid ett rationellt tal i varje delintervall vilket gör att den övre Riemann-summan alltid är lika med 1. Alltså kan det inte finnas ett tal  $I$  sådant att  $I_{\min} \leq I \leq I_{\max}$  vilket innebär att  $f$  inte är integrerbar. Det finns ett mer generellt integralbegrepp som kan hantera även så här konstiga funktioner. Den integralen kallas Lebesgue-integralen. Funktionen i det här exemplet är faktiskt Lebesgue-integrerbar med integralen 0.

Av integralens definition följer ett stort antal egenskaper som kan härledas med hjälp av Riemann-summor och sats 1.1.

**Sats 1.3 (Integralens egenskaper)** Låt  $f, g$  vara integrerbara på  $[a, b]$ . Då gäller,

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (1.26)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (1.27)$$

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx, \quad (1.28)$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx, \quad \text{om } f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b], \quad (1.29)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad (1.30)$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad \text{om } f \text{ är udda, } f(-x) = -f(x) \forall x \in [-a, a], \quad (1.31)$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad \text{om } f \text{ är jämn, } f(-x) = f(x) \forall x \in [-a, a], \quad (1.32)$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (1.33)$$

*Bevis.* I beviset kommer vi använda att en övre Riemann-summa aldrig växer (och en undre aldrig avtar) om en eller flera punkter läggs till i partitionen. För att se detta kan vi titta på ett delintervall  $[x_{i-1}, x_i]$ . Låt  $f$ 's minsta övre begränsning på intervallet vara  $M$ . Vi lägger till punkten  $x \in (x_{i-1}, x_i)$ . Då kommer  $f$ 's minsta övre begränsningar  $M_1$  och  $M_2$  på  $[x_{i-1}, x]$  och  $[x, x_i]$  vara mindre än eller lika med  $M$ . För bidraget till den övre Riemann-summan gäller  $M_1|x - x_{i-1}| + M_2|x_i - x| \leq M|x_i - x_{i-1}|$ .

Vi börjar med (1.27). Denna likhet kan ses som en definition av integralen av en funktion då den övre integrationsgränsen är mindre än den undre. I motsvarande Riemann-summor innebär detta att  $\Delta x_i$  byter tecken och därmed även hela summan. Sedan följer (1.26) av (1.27) genom att låta  $b = a$  och notera att  $\int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx = 0$ . För (1.28) antar vi först att  $A, B \geq 0$ . Eftersom summan av maximum av två funktioner är större än eller lika med max av summan (och på motsvarande sätt med min) har vi att

$$AI_{\min}(f, P) + BI_{\min}(g, P) \leq I_{\min}(Af + Bg, P) \leq I_{\max}(Af + Bg, P) \leq AI_{\max}(f, P) + BI_{\max}(g, P).$$

Vi väljer nu  $P$  så att  $AI_{\max}(f, P) + BI_{\max}(g, P) - AI_{\min}(f, P) - BI_{\min}(g, P) < \epsilon$  vilket är möjligt eftersom det finns  $P'$  så att  $AI_{\max}(f, P') - AI_{\min}(f, P') < \frac{\epsilon}{2}$  och  $BI_{\max}(g, P'') - BI_{\min}(g, P'') < \frac{\epsilon}{2}$  och vi kan låta  $P = P' \cup P''$ . Vi drar slutsatsen att

$$\left| \int_a^b Af(x) + Bg(x) dx - A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx \right| < \epsilon \quad (1.34)$$

eftersom båda integralerna ligger i intervallet  $[AI_{\min}(f, P) + BI_{\min}(g, P), AI_{\max}(f, P) + BI_{\max}(g, P)]$  som maximalt är av längd  $\epsilon$ . För att hantera negativa  $A, B$  kan vi låta  $f$  och eller  $g$  byta tecken och använda att  $\int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$  vilket följer av att minustecken kan flyttas ut ur Riemann-summor. Relation (1.29) visar vi med motsägelsebevis. Anta att  $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$  eller uttryckt

på ett annat sätt  $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \delta > 0$  för något  $\delta > 0$ . Då finns partition  $P$  sådan att  $I_{\min}(f, P) > I_{\max}(g, P) \geq I_{\min}(g, P)$  eftersom båda funktionerna är integrerbara och Riemannsumorna kan komma godtyckligt nära integralerna och  $\delta > 0$  är fixt. Detta är dock en motsägelse eftersom  $I_{\min}(f, P) \leq I_{\min}(g, P)$  för alla  $P$  om  $g \geq f$ . Alltså gäller  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ . Sedan följer (1.30) från (1.29) eftersom både  $f(x)$  och  $-f(x)$  är begränsade av  $|f(x)|$  och  $\pm \int_a^b f(x) dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ . Resterande följer med liknande resonemang. Vi lämnar dem som övning.  $\square$

Vi studerar två exempel på hur integralens egenskaper kan användas för att bestämma integraler.

**Exempel 1.8 (Integralens egenskaper)** Vi vill bestämma integralen  $\int_{-1}^1 2 - 3x^3 dx$ . Vi kan använda egenskap (1.28) för att skriva om den som  $\int_{-1}^1 2 - 3x^3 dx = \int_{-1}^1 2 dx - 3 \int_{-1}^1 x^3 dx$ . Den första integralen är arean av en rektangel med bredd 2 och höjd 2 alltså 4. Den andra integralen är 0 eftersom  $x^3$  är udda och intervallet  $[-1, 1]$  är symmetriskt.

**Exempel 1.9 (Integralens egenskaper)** Vi vill visa att  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$ . Vi noterar att  $e^{-x^2} \leq 1$  för alla  $x \in [0, 1]$ . Egenskap (1.29) ger då att  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx = 1$ .

## 1.4 Medelvärdeessatsen

Medelvärdeessatsen för derivator har en motsvarighet för integraler. Den säger att integralen av en kontinuerlig funktion  $f$  över intervallet  $[a, b]$  är lika med  $f(c)(b - a)$  för något  $c \in [a, b]$ . I figur (1.6) ser vi att linjen  $f(c)$  skär grafen så att lika mycket yta är under och över linjen.

**Sats 1.4 (Medelvärdeessatsen)** Låt  $f$  vara kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$ . Då finns en punkt  $c \in [a, b]$  sådan att  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ .

*Bevis.* Eftersom  $f$  är kontinuerlig antar  $f$  både maximum  $M$  och minimum  $m$  på intervallet  $[a, b]$ . Låt  $f(x_M) = M$  och  $f(x_m) = m$ . Låt  $P = \{a, b\}$  vara partitionen innehållande endast de två ändpunkterna. Då gäller

$$m(b - a) = I_{\min}(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq I_{\max}(f, P) = M(b - a). \quad (1.35)$$

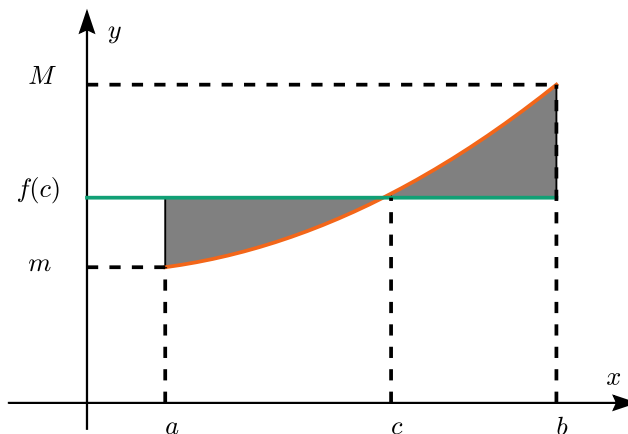
Därför gäller

$$f(x_m) = m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M = f(x_M). \quad (1.36)$$

Eftersom  $f(x)$  är kontinuerlig antas alla mellanliggande värden i intervallet  $[m, M]$ , enligt satsen om mellanliggande värden. Då finns en punkt  $c \in [a, b]$  sådan att

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx. \quad (1.37)$$

Efter multiplikation med  $(b - a)$  följer satsen.  $\square$



Figur 1.6: Illustration av medelvärdessatsen. Det finns ett  $c$  så att arean under  $f$  mellan  $a$  och  $b$  är lika med  $b - a$  gånger  $f(c)$ .

Medelvärdet av en mängd tal definieras som summan av talen dividerat med antalet. Det går även att definiera medelvärdet av en funktion med hjälp av integralen.

**Definition 1.4 (Medelvärdet av en funktion)** Medelvärdet  $\bar{f}$  av en integrerbar funktion  $f$  på intervallet  $[a, b]$  definieras av

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (1.38)$$

**Exempel 1.10 (Medelvärdet av en funktion)** Vi vill beräkna medelvärdet av  $f(x) = x$  på intervallet  $[1, 3]$ . Vi har,

$$\bar{f} = \frac{1}{3-1} \int_1^3 x dx = \frac{1}{2} \frac{3^2 - 1^2}{2} = 2. \quad (1.39)$$

Medelvärdessatsen är en viktig komponent i beviset av analysens fundamentalsats som nästa sektion handlar om.

## 1.5 Analysens fundamentalsats

En hörnsten i den matematiska analysen är analysens fundamentalsats som visar att derivatan av integralen av en funktion ger tillbaka funktionen själv. Derivatan är alltså integralens invers. Vi börjar med att introducera begreppet primitivfunktion.

**Definition 1.5 (Primitivfunktion)** En funktion  $F$  kallas primitivfunktion till en funktion  $f$  på intervallet  $I$  om  $F'(x) = f(x)$  för alla  $x \in I$ .

**Sats 1.5 (Analysens fundamentalsats)** Låt  $f$  vara kontinuerlig på ett intervall  $I$  innehållande punkten  $a \in I$ . Låt vidare funktionen  $F$  definieras av

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Då är  $F$  en primitivfunktion till  $f$  på  $I$ , det vill säga  $F'(x) = f(x)$  för alla  $x \in I$ .

Om  $G(x)$  är en godtycklig primitivfunktion till  $f(x)$  på  $I$ , så gäller för varje  $b \in I$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a). \quad (1.40)$$

*Bevis.* Vi använder derivatans definition

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \quad (1.41)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x), \quad (1.42)$$

där  $c \in [x, x+h]$  för varje fixt  $h$  ges av medelvärdessatsen. Om  $h < 0$  följer samma sak genom att byta integrationsgränserna och därigenom få ett intervall  $[x+h, x]$  för vilket medelvärdessatsen kan användas. Sista steget  $\lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$  följer eftersom  $f$  är kontinuerlig.

Om  $G'(x) = f(x)$  har vi att  $\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = 0$ . Medelvärdessatsen för derivator ger då att  $F(x) - G(x) = C$  där  $C$  är en konstant. Då gäller,  $\int_a^x f(t) dt = F(x) = G(x) + C$ . Genom att låta  $x = a$  och använda integralens egenskap har vi att  $0 = G(a) + C$  vilket ger  $C = -G(a)$ . Vi låter slutligen  $x = b$  vilket ger

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

□

Vi har alltså visat att derivatan av en primitivfunktion är lika med funktionen själv  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$ . Det följer också att primitivfunktionen ej är unik. Om  $F(x)$  är primitivfunktion till  $f(x)$  är även  $F(x) + C$ , för en konstant  $C \in \mathbb{R}$ , det. Vi kommer ofta använda notationen  $F(x)$  som primitiv till  $f(x)$  men ibland är notationen  $\int f(x) dx$  användbar. Alltså en integral utan integrationsgränser. Primitivfunktionen  $F(x) = \int f(x) dx$  är till skillnad från integralen en funktion av variabeln  $x$ . För att förenkla notationen vid användandet av integralen inför vi en evalueringsymbol.

**Definition 1.6 (Evalueringsymbolen)** Låt  $F(x)$  vara primitivfunktion till  $f$  på  $[a, b]$ . Då gäller

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a). \quad (1.43)$$

Här har vi infört evalueringsymbolen  $\left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$ .

Analysens fundamentalsats förenklar bestämning av integraler betydligt. Om man känner en primitivfunktion till  $f$  kan man direkt bestämma integralen. Många primitivfunktioner kan bestämmas genom att vi redan kan derivatan av ett stort antal funktioner.

**Sats 1.6 (Primitivfunktioner)** Givet funktionen  $f(x)$  ges en primitivfunktion av  $F(x)$ , som uppfyller  $F'(x) = f(x)$ . Viktiga primitivfunktioner att minnas är

$$f(x) = x^r \quad F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}, \quad r \neq -1 \quad (1.44)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad F(x) = \ln |x| \quad (1.45)$$

$$f(x) = \sin(ax) \quad F(x) = -\frac{\cos(ax)}{a} \quad (1.46)$$

$$f(x) = \cos(ax) \quad F(x) = \frac{\sin(ax)}{a} \quad (1.47)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad F(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0 \quad (1.48)$$

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad F(x) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right), \quad a \neq 0 \quad (1.49)$$

$$f(x) = e^{ax} \quad F(x) = \frac{e^{ax}}{a}, \quad a \neq 0 \quad (1.50)$$

$$f(x) = b^{ax} \quad F(x) = \frac{b^{ax}}{a \ln(b)}, \quad a \neq 0, b > 1. \quad (1.51)$$

Vi ger några exempel på hur integraler kan bestämmas med hjälp av primitivfunktioner.

**Exempel 1.11 (Integralen av ett polynom)** Bestäm integralen av  $f(x) = x^4 - 2x^2$  mellan  $x = 0$  och  $x = 2$ . Vi har att

$$\int_0^2 x^4 - 2x^2 dx = \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{5} - \frac{16}{3} = \frac{16}{15}. \quad (1.52)$$

**Exempel 1.12 (Integralen av  $\cos(x)$ )** Bestäm integralen av  $\cos(x)$  mellan  $x = \frac{\pi}{2}$  och  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Vi har att  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -2$ .

Tyvärr går det inte att skapa en heltäckande tabell av primitivfunktioner på det här sättet eftersom alla primitivfunktioner ej låter sig uttryckas i termer av elementära funktioner, exempelvis  $\int e^{x^2} dx$ . I nästa kapitel kommer vi studera analytiska och numeriska tekniker för att bestämma/beräkna integraler i fall där vi inte omedelbart känner primitivfunktionen. I nästa sats generaliserar vi fundamentalsatsen till integraler där integrationsgränserna också är funktioner av  $x$ .

**Sats 1.7 (Derivata av integral)** Låt  $f(x)$  vara integrerbar och låt  $g(x)$  och  $h(x)$  vara kontinuerligt deriverbara på  $\mathbb{R}$ . Då gäller

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x). \quad (1.53)$$

*Bevis.* Vi noterar först att

$$\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x),$$

genom att använda kedjeregeln. Vi applicerar nu detta resultat två gånger på följande vis

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f(t) dt - \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} f(t) dt \quad (1.54)$$

$$= f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x). \quad (1.55)$$

□

**Exempel 1.13 (Derivatan av en integral)** Bestäm derivatan av  $f(x) = \int_{x^2}^1 \sin(t) dt$ . Vi har

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^1 \sin(t) dt = -\sin(x^2)2x. \quad (1.56)$$

## 1.6 Generaliserade integraler

Om ena eller båda integrationsgränserna är obegränsade eller om funktionen  $f(x)$  är obegränsad på intervallet  $[a, b]$  kan vi inte direkt tillämpa vår definition av integralen. Denna typ av integraler kallas generaliserade integraler. De hanteras genom att gå i gräns och kan leda till konvergenta (ändliga) eller divergenta (oändliga) integraler.

**Definition 1.7 (Generaliserad integral)** En integral

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1.57)$$

kallas en generaliserad integral om (i)  $a = -\infty$  eller  $b = \infty$  eller (ii)  $f$  är obegränsad på  $[a, b]$ . I fallet (i) definierar vi,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^b f(x) dx, \quad (1.58)$$

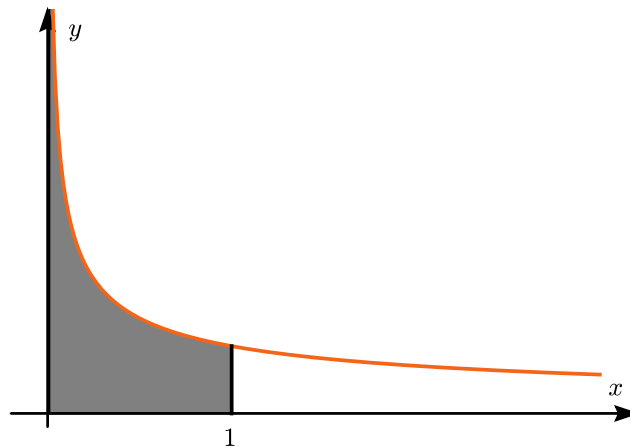
och på motsvarande sätt om  $b = \infty$ . I fallet (ii) om  $f(x)$  är kontinuerlig i  $(a, b]$  men obegränsad i  $a$ , definierar vi,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(x) dx, \quad (1.59)$$

och på motsvarande sätt om funktionen är obegränsad i  $b$ . Antar integralen ett ändligt värde säger vi att integralen konvergerar, annars att den divergerar.

Vi ger nu tre exempel på hur generaliserade integraler kan bestämmas genom att använda definitionen.



Figur 1.7: Funktionen  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  integrerad från 0 till 1.

**Exempel 1.14 (Konvergent integral)** Bestäm den generaliserade integralen av den obegränsade funktionen  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  på intervallet  $[0, 1]$ . Vi studerar gränsvärdet för integralen  $\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  då  $\epsilon \rightarrow 0+$  och får

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[ 2\sqrt{x} \right]_{\epsilon}^1 = 2. \quad (1.60)$$

Integralen är alltså konvergent.

**Exempel 1.15 (Konvergent integral)** Bestäm den generaliserade integralen av funktionen  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  mellan  $x = 1$  och  $\infty$ . Vi studerar gränsvärdet av  $\int_0^R \frac{1}{x^2} dx$  då  $R \rightarrow \infty$ . Vi får

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^R = 1. \quad (1.61)$$

Integralen är konvergent.

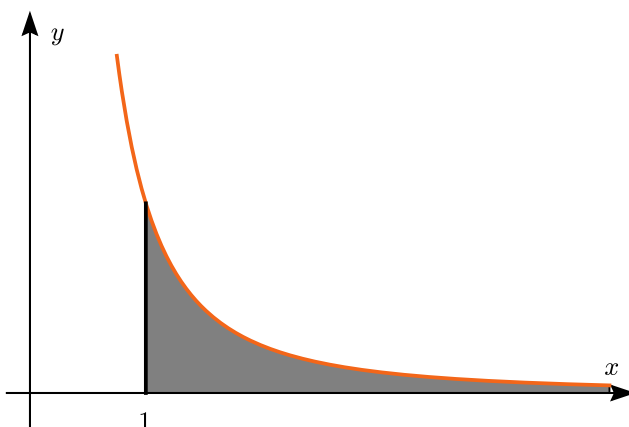
**Exempel 1.16 (Divergent integral)** Bestäm integralen  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ . Vi har,

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = \lim_{y \rightarrow 1^-} \left[ -\ln(1-x) \right]_0^y \quad (1.62)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1^-} -\ln(1-y) = \infty. \quad (1.63)$$

Integralen är divergent.

Dessa exempel kan innefattas i en allmän teori för integraler av funktioner  $x^{-p}$  från 0 till  $\infty$ . Vi presenterar nu en sats som säger för vilka  $p$  integraler av  $x^{-p}$  är konvergenta på  $(0, a]$  respektive  $[a, \infty)$ .



Figur 1.8: Funktionen  $\frac{1}{x^2}$  integrerad från 1 till  $\infty$ .

**Sats 1.8 ( $p$ -integraler)** Låt  $0 < a < \infty$ . Då gäller att

$$\int_a^\infty x^{-p} dx = \begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{p-1}, & \text{om } p > 1, \\ \text{divergerar till } \infty, & \text{om } p \leq 1, \end{cases} \quad (1.64)$$

och vidare att

$$\int_0^a x^{-p} dx = \begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{1-p}, & \text{om } p < 1, \\ \text{divergerar till } \infty, & \text{om } p \geq 1. \end{cases} \quad (1.65)$$

*Bevis.* Vi börjar med  $\int_a^\infty x^{-p} dx$ . Om  $p > 1$  gäller

$$\int_a^\infty x^{-p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R x^{-p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^R = \frac{a^{1-p}}{p-1}. \quad (1.66)$$

Om  $p = 1$  gäller

$$\int_a^\infty x^{-1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R x^{-1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln(x)]_a^R = \infty. \quad (1.67)$$

Om  $p < 1$  gäller

$$\int_a^\infty x^{-p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R x^{-p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^R = \infty. \quad (1.68)$$

Vi går vidare till det andra fallet  $\int_0^a x^{-p} dx$ . Om  $p < 1$  gäller

$$\int_0^a x^{-p} dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^a x^{-p} dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_y^a = \frac{a^{1-p}}{1-p}. \quad (1.69)$$

Om  $p = 1$  gäller

$$\int_0^a x^{-1} dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^a x^{-1} dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} [\ln(x)]_y^a = \infty. \quad (1.70)$$

Om  $p > 1$  gäller

$$\int_0^a x^{-p} dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^a x^{-p} dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_y^a = \infty. \quad (1.71)$$

□

Även för generaliserade integraler gäller att integralen av en funktion  $g(x) \geq f(x) \geq 0$  är större än integralen av  $f(x)$ .

**Sats 1.9 (Begränsning av integraler)** Låt  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  och  $f$  och  $g$  vara kontinuerliga funktioner på intervallet  $(a, b)$  sådana att  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Om  $\int_a^b g(x) dx$  konvergerar så gör även  $\int_a^b f(x) dx$  det och vidare gäller

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (1.72)$$

På samma sätt gäller att om  $\int_a^b f(x) dx$  divergerar gör även  $\int_a^b g(x) dx$  det.

*Bevis.* Eftersom  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  kommer integralerna antingen konvergera mot ett icke-negativt värde eller divergera. Vi har från integralens egenskaper att för varje  $a < \alpha < \beta < b$  gäller att

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx \leq \int_\alpha^\beta g(x) dx. \quad (1.73)$$

Genom att gå i gräns  $\alpha \rightarrow a$  och  $\beta \rightarrow b$  får vi antingen att  $\int_a^b f(x) dx$  divergerar och därmed också  $\int_a^b g(x) dx$  eller att  $\int_a^b g(x) dx$  konvergerar och då gäller  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ . □

**Exempel 1.17 (Generaliserad integral)** Avgör om  $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx$  är konvergent. Vi noterar först att

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx, \quad (1.74)$$

gäller på grund av integralens egenskaper. Vidare gäller att  $|\sin(x)| \leq 1$ . Vi kan alltså applicera sats 1.9 med funktionerna  $f(x) = \frac{|\sin(x)|}{x^2} \geq 0$  och  $g(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ . Vi får

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx \leq \int_1^\infty x^{-2} dx = 1. \quad (1.75)$$

I sista steget använder vi sats 1.8.

## Övningar

### 1.1 Areabestämning som gränsvärde av summor

**Övning 1.1** Bestäm värdet av summorna.

(a)  $\sum_{i=1}^6 4^{i-1}$  (b)  $\sum_{i=1}^{10} 5i^2$  (c)  $\sum_{i=1}^4 (10i - i^2)$  (d)  $\sum_{i=0}^5 (3 - i)(i + 3)$

**Övning 1.2** Bestäm arean som begränsas av  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  och  $y = f(x)$ .

(a)  $f(x) = 3x$  (b)  $f(x) = x^2 + 1$  (c)  $f(x) = x^2 - 1$  (d)  $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$

**Övning 1.3** Bestäm arean mellan  $y = 0$  och  $y = f(x)$  på intervallet  $I$ .

(a)  $f(x) = x^2$ ,  $I = [1, 3]$  (b)  $f(x) = 12 - 5x$ ,  $I = [-2, 1]$  (c)  $f(x) = \frac{1-2x}{2}$ ,  $I = [0, 1]$   
 (d)  $y = kx$  ( $k > 0$ ),  $I = [0, a]$

**Övning 1.4** Bestäm arean mellan  $f(x)$  och  $g(x)$  på intervallet  $I$ .

(a)  $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ,  $g(x) = \frac{x}{2}$ ,  $I = [0, 2]$  (b)  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = -x^2$ ,  $I = [1, 2]$   
 (c)  $f(x) = \frac{\cos(x)+2x^2}{x}$ ,  $g(x) = \frac{\cos(x)+x^2}{x}$ ,  $I = [1, 5]$   
 (d)  $g(x) = f(x) + k$  för någon kontinuerlig funktion  $f$  och något  $k \in \mathbb{R}$ ,  $I = [a, b]$

### 1.2 Riemann-summor

**Övning 1.5** Bestäm övre och undre Riemann-summan för  $f$  på det givna intervallet med  $n$  lika stora delintervall.

(a)  $f(x) = x^3$  på  $[0, 3]$ ,  $n = 3$  (b)  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$  på  $[0, 3]$ ,  $n = 2$   
 (c)  $f(x) = e^{-x}$  på  $[0, 2]$ ,  $n = 4$  (d)  $f(x) = x^2$  på  $[1, 5]$ ,  $n = 10$

**Övning 1.6** Bestäm övre och undre Riemann-summan för  $f$  på det givna intervallet med  $n$  lika stora delintervall.

(a)  $f(x) = \cos(x)$  på  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $n = 4$  (b)  $f(x) = |x|$  på  $[-1, 1]$ ,  $n = 200$   
 (c)  $f(x) = x^2$  på  $[0, 1]$ ,  $n = 3$   
 (d)  $f(x) = \ln(x)$  på  $[1, k + 1]$ ,  $n = k$ ,  $k \in \mathbb{N}$

### 1.3 Definition av integralen

**Övning 1.7** Förenkla uttrycket.

(a)  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a 2f(x) dx$  (b)  $\int_a^c 3f(x) dx + \int_c^b f(x) dx - 2 \int_b^c f(x) dx$   
 (c)  $\int_2^5 f(x) dx + \int_0^5 -2f(x) dx - 2 \int_0^2 f(x) dx$  (d)  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\pi/2} f(x) dx + \int_0^{\pi/2} f(x) dx$

**Övning 1.8** Bestäm värdet av uttrycket genom att använda integralens egenskaper.

(a)  $\int_{-3}^3 2x + 1 dx$  (b)  $\int_{-\pi}^{\pi} t \cos(t) dt$  (c)  $\int_{-a}^a -x dx$  (d)  $\int_{-2}^2 a^x - a^{-x} dx$

**Övning 1.9** Bestäm integralens värde givet att  $\int_1^t \frac{1}{t} dt = \ln t, t > 0$ .

(a)  $\int_1^6 \frac{1}{t} dt$  (b)  $\int_{0.5}^1 \frac{1}{t} dt$  (c)  $\int_2^5 \frac{1}{t} dt$  (d)  $\int_{0.1}^{10} \frac{1}{t} dt$

**Övning 1.10** Bestäm värdet av uttrycket genom att tolka integralen som en area samt genom att använda integralens egenskaper.

(a)  $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - y^2} dy$  (b)  $\int_{-k}^k |2x| dx$  (c)  $\int_{-3}^3 v^3 + 5v + 6 dv$  (d)  $\int_1^5 x - |x - 3| dx$

**Övning 1.11** Visa att funktionen är integrerbar på intervallet, dvs. visa att  $|I_{\max}(f, P_n) - I_{\min}(f, P_n)| \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ .

(a)  $y = x - 2$  på  $[1, 5]$  (b)  $y = k$  på  $[a, b]$  (c)  $y = x$  på  $[-a, 0]$  (d)  $y = x^2$  på  $[0, 1]$

#### 1.4 Medelvärdessatsen

**Övning 1.12** Bestäm funktionens medelvärde på intervallet.

(a)  $f(x) = 2x$  på  $[0, 3]$  (b)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  på  $[-2, 2]$  (c)  $f(x) = 4 - |x - 2|$  på  $[0, 6]$   
 (d)  $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$  på  $[0, \pi]$

**Övning 1.13** Bestäm funktionens medelvärde på intervallet givet att  $\int_1^t \frac{1}{t} dt = \ln t$ .

(a)  $f(t) = \frac{t-1}{t}$  på  $[1, 5]$  (b)  $f(u) = \frac{1}{2u}$  på  $[\frac{1}{a}, a]$  (c)  $f(v) = \frac{1+v^2}{kv}$  på  $[1, k]$   
 (d)  $f(w) = |\frac{2-w}{2w}|$  på  $[1, 11]$

**Övning 1.14** Bestäm alla värden  $c$  sådana att  $f(c) = \bar{f}$  på intervallet.

(a)  $f(x) = \frac{4-x}{3}$  på  $[-2, 3]$  (b)  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  på  $[-r, r]$  (c)  $f(x) = 3x^2$  på  $[0, a]$   
 (d)  $f(x) = kx^2$  på  $[-a, a]$

#### 1.5 Analysens fundamentalsats

**Övning 1.15** Bestäm integralen.

(a)  $\int_2^3 x^2 dx$  (b)  $\int_1^5 \frac{1}{t^2} dt$  (c)  $\int_{1/2}^1 \frac{x^6-3}{x^3} dx$  (d)  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4} dt$

**Övning 1.16** Bestäm integralen.

(a)  $\int_0^9 u \sqrt{u} du$  (b)  $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{v}}{\sqrt{v}} dv$  (c)  $\int_8^{27} \sqrt[3]{w} dw$  (d)  $\int_0^t \sqrt[k]{x} dx$

**Övning 1.17** Bestäm integralen.

(a)  $\int_0^\pi 2 \cos(\theta) + \sin(2\theta) d\theta$  (b)  $\int_\pi^{3\pi/2} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - 1 d\phi$  (c)  $\int_{\frac{\pi}{4a}}^{\frac{5\pi}{4a}} \sin(av) \cos(av) dv$

$$(d) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(u) du$$

**Övning 1.18** Bestäm integralen.

$$(a) \int_0^2 e^{3x} dx \quad (b) \int_4^6 \frac{2x}{5} dx \quad (c) \int_{-1}^{\frac{1}{2}} 3^{2x} dx \quad (d) \int_1^4 e^{\frac{x-3}{2}} dx$$

**Övning 1.19** Bestäm integralen.

$$(a) \int_1^{e^2} \frac{2}{t} dt \quad (b) \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{x^2+9} dx \quad (c) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx \quad (d) \int_1^2 \frac{t^7+7}{t} dt$$

**Övning 1.20** Bestäm derivatan.

$$(a) \frac{d}{dx} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} t dt \quad (b) \frac{d}{dx} \int_{\ln(x)}^x e^t dt \quad (c) \frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^2} \frac{t}{1-t} dt \quad (d) \frac{d}{dx} \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1-t^2}{t} dt$$

### 1.6 Generaliserade integraler

**Övning 1.21** Bestäm integralen eller visa att den divergerar.

$$(a) \int_1^\infty x^{-3} dx \quad (b) \int_1^\infty \frac{1}{t-\sqrt{t+1}} dt \quad (c) \int_1^\infty \frac{2x+1}{x^2} dx \quad (d) \int_1^\infty \frac{2t+1}{t^3} dt$$

**Övning 1.22** Bestäm integralen eller visa att den divergerar.

$$(a) \int_0^5 x^{-3/2} dx \quad (b) \int_0^4 x^{-1/2} dx \quad (c) \int_0^\infty x^{-p} dx, p > 0 \quad (d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x \cos(x)} dx$$

**Övning 1.23** Undersök om integralen konvergerar eller divergerar.

$$(a) \int_0^\infty \frac{t^2}{t^4+2} dt \quad (b) \int_0^\infty e^{-t^2} dt \quad (c) \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}} dt \quad (d) \int_0^2 t^2 dt$$

**Övning 1.24** Bestäm integralen eller visa att den divergerar.

$$(a) \int_0^\infty k^{-u} du, k \neq 1 \quad (b) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+s^2} ds \quad (c) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3-v^2}} dv \quad (d) \int_1^\infty \frac{\ln w}{w} dw$$

**Övning 1.25** Visa om integralen konvergerar eller divergerar.

$$(a) \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{x} dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(\sqrt{x})} dx \quad (c) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+e^x}} dx \quad (d) \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$$

## Problem

### 1.1 Areabestämning som gränsvärde av summor

**Problem 1.1** Visa att  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . *Tips:* summera relationen  $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$  från  $i = 1$  till  $n$  och notera att vänsterledet blir en teleskopande summa  $\sum_{i=1}^n (i+1)^3 - i^3 = (n+1)^3 - 1$ .

**Problem 1.2** Visa att  $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$  med hjälp av induktion.

### 1.2 Riemann-summor

**Problem 1.3** Bestäm övre och undre Riemann-summan för  $x^3 - x^2$  på intervallet  $[0, 1]$  med 3 lika stora delintervall.

**Problem 1.4** Visa att den undre Riemann-summan av en funktion  $f$  på ett intervall  $I$  med partitionen  $P$  aldrig kan minska om en ny punkt läggs till i  $P$ .

### 1.3 Definition av integralen

**Problem 1.5** Visa att integralen av en udda funktion ( $f(-x) = -f(x)$ ) över ett symmetriskt intervall  $[-a, a]$  är  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$  och att integralen av en jämn funktion ( $f(-x) = f(x)$ ) på samma intervall  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

**Problem 1.6** Visa att för  $c \in [a, b]$  gäller att  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

### 1.4 Medelvärdessatsen och analysens fundamentalsats

**Problem 1.7** Låt  $f(x) = x^n$ , där  $n$  är ett positivt heltal. Visa att  $(\int_0^1 f(x) dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx$  (som även kan uttryckas  $(\bar{f})^2 \leq \bar{f}^2$ ).

**Problem 1.8** Lös integralekvationen  $f(x) = 2 - 2 \int_0^x f(t) dt$ .

### 1.5 Generaliserade integraler

**Problem 1.9** Visa att integralen  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$  divergerar.

**Problem 1.10** Visa att integralen  $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$  konvergerar för alla  $n \geq 0$ .

## 2. Integrationstekniker

2.1	Variabelsubstitution och partiell integration	26
2.2	Integration av rationella funktioner	30
2.3	Båglängd, area och volym	32
2.4	Rotationskroppar	36
2.5	Numeriska metoder	38
2.6	Konvergens av numeriska approximationer	42

*Analysens fundamentalsats ger en effektiv metod för att bestämma integraler med hjälp av primitivfunktioner. Deriveringsreglerna ger oss ett stort antal funktioner med känd primitivfunktion. Trots det finns det många funktioner för vilka det är svårt att härleda primitivfunktionen. I det här kapitlet presenterar vi två viktiga tekniker för att ta fram primitivfunktioner, nämligen variabelsubstitution och partiell integration. Vi visar även på användningsområden för integralen, så som bestämning av längd, area och volym. Trots att vi har kraftfulla tekniker för att härleda primitivfunktioner finns ett stort antal funktioner där primitivfunktionen inte kan uttryckas, eller är komplicerad att uttrycka, i elementära funktioner som  $e^x$ ,  $\sin(x)$  och  $\cos(x)$ . Vi studerar därför generella numeriska metoder för beräkning av integraler samt metodernas konvergensthastighet.*

### 2.1 Variabelsubstitution och partiell integration

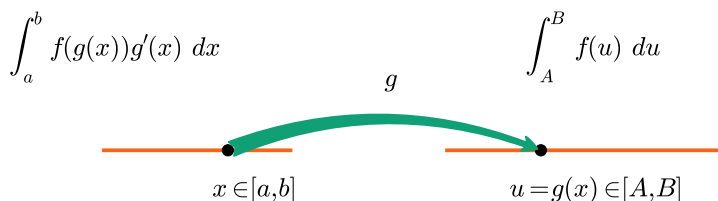
För att kunna härleda primitivfunktioner av mer komplicerade integrander behövs en uppsättning analytiska tekniker. Två av de främsta är variabelsubstitution och partiell integration. Båda metoderna bygger på att omvandla integranden till ett uttryck vars primitivfunktion är känd. Vi börjar med att studera variabelsubstitution.

Variabelsubstitution är en teknik för att beräkna primitivfunktioner där man byter integrationsvariabel på ett sådant sätt att primitivfunktionen blir enklare att ta fram. Metoden bygger på kedjeregeln för derivator.

**Sats 2.1 (Variabelsubstitution)** Låt  $g$  vara deriverbar med kontinuerlig derivata på intervallet  $[a, b]$  med  $g(a) = A$  och  $g(b) = B$ . Vidare låt  $f$  vara kontinuerlig på  $[A, B]$ . Då gäller att

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_A^B f(u) du. \quad (2.1)$$





Figur 2.1: Substitutionen  $u = g(x)$  transformerar  $x \in [a, b]$  till  $u \in [A, B]$ .

*Bevis.* Låt  $F(u)$  vara primitivfunktion till  $f(u)$ ,  $F'(u) = f(u)$ , (en sådan finns eftersom kontinuerliga funktioner är integrerbara). Då gäller  $\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x)$  och vi får

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \left[ F(g(x)) \right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(B) - F(A) = \int_A^B f(u) du. \quad (2.2)$$

□

I figur 2.1 ser vi en schematisk bild över hur integrationsintervallet  $[a, b]$  och integranden transformeras genom substitutionen  $u = g(x)$  för en given funktion  $g(x)$  sådan att  $A = g(a)$  och  $B = g(b)$ . I beviset använder vi som sagt kedjeregeln för derivator. Vi presenterar resultatet för en bestämd integral med integrationsgränser  $a$  och  $b$ . Ett analogt resultat kan även uttryckas för primitivfunktionen (utan att sätta in gränser). Då gäller med samma argumentation att

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C, \quad (2.3)$$

där  $C$  är en godtycklig konstant.

**Exempel 2.1 (Variabelsubstitution)** Bestäm integralen  $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$  med hjälp av variabelsubstitution. Vi noterar att derivatan  $\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x$  förekommer i täljaren. Det innebär att om vi gör substitutionen  $u = x^2 + 1$  kommer  $u'(x) = 2x$ . I variabeln  $u$  blir alltså integranden endast  $u^{-1/2}$  vars primitivfunktion är känd. Vi skriver på följande vis

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left\{ u = x^2 + 1, u(0) = 1, u(1) = 2, \frac{du}{dx} = 2x \right\} \quad (2.4)$$

$$= \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[ 2\sqrt{u} \right]_1^2 = 2(\sqrt{2} - 1). \quad (2.5)$$

Notera att integrationsgränserna måste ändras vid variabelsubstitution.

**Exempel 2.2 (Variabelsubstitution)** Bestäm integralen  $\int_0^1 x^2 \sin(x^3) dx$ . Vi ser att derivatan till argumentet i sinusfunktionen förekommer i integranden så när som på en konstant. Vi väljer

$u = x^3$  och får

$$\int_0^1 x^2 \sin(x^3) dx = \left\{ u = x^3, u(0) = 0, u(1) = 1, \frac{du}{dx} = 3x^2 \right\} = \frac{1}{3} \int_0^1 \sin(u) du \quad (2.6)$$

$$= \left[ -\frac{1}{3} \cos(u) \right]_0^1 = \frac{1}{3}(1 - \cos(1)). \quad (2.7)$$

**Exempel 2.3 (Variabelsubstitution)** Bestäm primitivfunktionen till  $\sin^2(x) \cos(x)$ . Eftersom derivatan av  $\sin(x)$  är  $\cos(x)$  och den finns i integranden, väljer vi substitutionen  $u(x) = \sin(x)$ . Vi får

$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx = \left\{ u = \sin(x), \frac{du}{dx} = \cos(x) \right\} = \int u^2 du \quad (2.8)$$

$$= \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} + C, \quad (2.9)$$

där  $C$  är en godtycklig konstant.

I alla exemplen förekommer en funktion  $f(g(x))$  (med  $g(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = x^3$  respektive  $g(x) = \sin(x)$ ) multiplicerat med  $g'(x)$  i integranden. Ibland kan det även vara fördelaktigt att göra tvärtom, att låta  $x = g(u)$ . Denna teknik kallas inverssubstitution.

**Sats 2.2 (Inverssubstitution)** Låt  $f$  vara integrerbar på intervallet  $[a, b]$  och låt  $g$  vara deriverbar med kontinuerlig derivata på intervallet  $[a, b]$  med  $g(A) = a$  och  $g(B) = b$ . Vidare låt  $f$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$ . Då gäller

$$\int_a^b f(x) dx = \int_A^B f(g(u))g'(u) du. \quad (2.10)$$

*Bevis.* Satsen följer direkt av sats 2.1 genom att låta  $x$  och  $u$  byta roller. □

Det är vanligt att trigonometriska funktioner används vid inverssubstitution. Innan vi ger ett exempel på inverssubstitution kommer ett exempel på integration av en trigonometrisk funktion.

**Exempel 2.4 (Primitivfunktion till  $\sin^2(x)$ )** Bestäm primitivfunktion till  $\sin^2(x)$ . Räknelagarna för trigonometriska funktioner ger att  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  samt att  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ . Tillsammans ger dessa resultat att  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \cos(2x) - \sin^2(x)$  vilket innebär att  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ . Vi kan nu bestämma primitivfunktionen

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C, \quad (2.11)$$

med en godtycklig konstant  $C$ . Primitivfunktion till  $\cos^2(x)$  följer från liknande resonemang och lämnas som övning.

**Exempel 2.5 (Inverssubstitution)** Bestäm integralen  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  med hjälp av inverssubstitution. Vi noterar att integranden beskriver en kvartsirkel med radie 2 och centrum i origo för  $0 \leq x \leq 2$ . Inverssubstitutionen  $x = 2 \cos(t)$  ger en förenklad integrand på grund av trigonometriska ettan,  $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\cos^2(x)} = 2 \sin(x)$ . Vi får

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left\{ x = 2 \cos(t), \frac{dx}{dt} = -2 \sin(t), 2 = 2 \cos(0), 0 = 2 \cos(\pi/2) \right\} \quad (2.12)$$

$$= -2 \int_{\pi/2}^0 \sqrt{4-4\cos^2(t)} \sin(t) dt \quad (2.13)$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt = \left\{ \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} \right\} \quad (2.14)$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} 1 - \cos(2t) dt = \pi. \quad (2.15)$$

Vi använde samma kalkyl som i förra exemplet för att bestämma integralen av  $\sin^2(t)$ . Vi noterar att vi därmed har beräknat arean av en kvartsirkel med radie 2.

Vi lämnar variabelsubstitution och går över till partiell integration. Att derivera en produkt av två funktioner görs enkelt med produktregeln. Att integrera en produkt är inte lika enkelt. Partiell integration bygger på produktregeln för derivator och kan ibland användas för bestämning av primitivfunktionen till produkten av två funktioner.

**Sats 2.3 (Partiell integration)** Låt  $f$  och  $g$  kontinuerliga på  $[a, b]$  med kontinuerlig derivata. Då gäller

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx. \quad (2.16)$$

*Bevis.* Produktregeln för derivator ger att

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (2.17)$$

Eftersom både derivatorna och funktionerna själva är kontinuerliga är hela uttrycket kontinuerligt och därmed integrerbart. Vi integrerar (2.17) över intervallet  $[a, b]$  och får

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) dx = [f(x)g(x)]_a^b. \quad (2.18)$$

□

Partiell integration används då den resulterande integranden  $f'g$  har en enklare primitivfunktion än  $gf$ . Ett sådant exempel är om  $f(x) = x$  eftersom  $f'(x) = 1$ . Om  $f$  är polynom av högre grad än 1 kan partiell integration användas upprepade gånger för att successivt minska ordningen, ett steg i taget.

**Exempel 2.6 (Partiell integration)** Bestäm integralen  $\int_0^\pi x \sin(x) dx$ . Vi använder partiell

integration eftersom derivatan av  $x$  är 1 och primitivfunktion till  $\sin(x)$  är känd som  $-\cos(x)$

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx = \left[ x(-\cos(x)) \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos(x)) dx = \pi + \int_0^\pi \cos(x) dx = \pi. \quad (2.19)$$

I nästa exempel utförs den partiella integrationen upprepade gånger för att reducera högre ordningens polynom.

**Exempel 2.7 (Reduktionsformel)** Givet funktionerna  $f_n(x) = x^n e^x$ ,  $n \in \mathbb{N}$  bestäm primitivfunktionerna  $F_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt$ . Vi använder partiell integration för att visa följande relation

$$F_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt = \{f(t) = t^n, f'(t) = nt^{n-1}, g(t) = e^t, G(t) = e^t\} \quad (2.20)$$

$$= x^n e^x - n \int_0^x t^{n-1} e^t dt = x^n e^x - nF_{n-1}(x). \quad (2.21)$$

Detta är en rekursiv relation. För att bestämma  $F_2(x)$ , till exempel, noterar vi att,  $F_0(x) = e^x$ ,  $F_1(x) = x e^x - F_0(x) = (x-1)e^x$  och vidare att  $F_2(x) = x^2 e^x - 2F_1(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ .

## 2.2 Integration av rationella funktioner

Vi vill bestämma primitivfunktion till rationella funktioner, alltså kvoten mellan två polynom,  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ . Om  $g$  har högre gradtal än  $h$  leder polynomdivision till ett polynom plus en rationell funktion där täljaren har lägre gradtal än nämnaren

$$f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{h(x)}. \quad (2.22)$$

Här är även  $p(x)$  och  $r(x)$  polynom. Vi kan enkelt hitta primitivfunktion till  $p(x)$  och alltså kan vi begränsa oss till att studera primitivfunktioner av rationella funktioner vars täljare har lägre gradtal än nämnaren.

**Exempel 2.8 (Polynomdivision)** Skriv om  $f(x) = \frac{2x^3-x}{x^2+3}$  som summan av ett polynom och en rationell funktion vars täljare är av lägre grad än nämnaren. Genom att lägga till och dra ifrån  $6x$  i täljaren och sedan förkorta med  $x^2 + 3$  får vi

$$f(x) = \frac{2x(x^2+3) - 6x - x}{x^2+3} = 2x - \frac{7x}{x^2+3}. \quad (2.23)$$

Vi börjar med fallet med linjär nämnare, det vill säga  $\frac{b}{x+a}$  där  $a, b \in \mathbb{R}$ . Vi får

$$\int \frac{b}{x+a} dx = \{u = x+a\} = b \int \frac{1}{u} du = b \ln |u| + C = b \ln |x+a| + C. \quad (2.24)$$

Nämnaren kan även vara ett linjärt polynom upphöjt till något heltal  $n \geq 2$ . I det fallet har vi

$$\int \frac{b}{(x+a)^n} dx = \{u = x+a\} = b \int u^{-n} du = \frac{b}{1-n} u^{1-n} + C = \frac{b}{1-n} \frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C. \quad (2.25)$$

Faktorer i $h(x)$	Partialbråk
$x + a$	$\frac{A_1}{x+a}$
$(x + a)^n$	$\frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x+a)^n}$
$x^2 + ax + b$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}$
$(x^2 + ax + b)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b)^n}$

Tabell 2.1: Faktorer med motsvarande partialbråk.

Vi går vidare till kvadratiske polynom och noterar att ett kvadratisk polynom  $x^2 + ax + b$ , via kvadratkoplettering och variabelsubstitutionen  $y = x + \frac{a}{2}$ , kan skrivas som  $x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4} = y^2 \pm c^2$ . Vi går tillbaka till  $x$ -variabeln och konstaterar att vi har fyra olika fall

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \{u = x^2 + a^2, \frac{du}{dx} = 2x\} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C, \quad (2.26)$$

$$\int \frac{x}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 - a^2| + C, \quad (2.27)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (2.28)$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} dx = \frac{1}{2a} (\ln|x - a| - \ln|x + a|) + C \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C. \quad (2.30)$$

I det sista exemplet använde vi en teknik som kallas partialbråksuppdelning. Vi faktorerar nämnaren  $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$  och gör en ansats med hjälp av faktorerna på följande vis

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x + a)(x - a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}. \quad (2.31)$$

Konstanterna  $A$  och  $B$  bestäms sedan genom att göra liknämngt

$$\frac{1}{(x + a)(x - a)} = \frac{A(x + a)}{(x + a)(x - a)} + \frac{B(x - a)}{(x + a)(x - a)}. \quad (2.32)$$

Eftersom likheten gäller för alla  $x$  måste täljarna vara lika för varje polynomgrad var för sig. Vi får

$$1 : 1 = Aa - Ba, \quad (2.33)$$

$$x : 0 = A + B. \quad (2.34)$$

Därför måste  $B = -A$  och därmed  $A = -B = \frac{1}{2a}$ .

Partialbråksuppdelning kan göras av godtyckliga rationella funktioner  $\frac{g(x)}{h(x)}$ . Polynomet i nämnaren  $h(x)$  kan uttryckas som produkten av linjära och kvadratiske faktorer upphöjt till faktorernas multiplicitet. Tabellen visar vilken ansats som ger korrekt partialbråksuppdelning beroende på vilka faktorer som ingår i polynomet  $h(x)$ . Partialbråksuppdelningen ger en uppdelning av  $f(x)$  som rationella funktioner med linjär eller kvadratisk nämnare upphöjt till multipliciteten hos faktorerna  $n$ . Det går att visa att uppdelningarna i tabellen alltid går att göra och att de är unika men det ligger utanför vad vi behandlar i denna bok. Givet partialbråksuppdelningen kan (2.24) och (2.26-2.29), eller variationer av dem i fallet med  $(x^2 + ax + b)^n$ , användas för att bestämma primitiver till var och en av termerna. Vi illustrerar hur partialbråksuppdelning och tabellen används genom två exempel.

**Exempel 2.9 (Primitiv till rationell funktion)** Bestäm primitivfunktionen till den rationella funktionen  $\frac{1}{x(x+1)^2}$ . Enligt tabellen ska vi göra följande ansats

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}. \quad (2.35)$$

Genom att göra liknämngt får vi följande ekvation i täljaren  $1 = A_1(x+1)^2 + A_2x(x+1) + A_3x$ . Detta leder till tre relationer:

$$x^2 : 0 = A_1 + A_2, \quad (2.36)$$

$$x : 0 = 2A_1 + A_2 + A_3, \quad (2.37)$$

$$1 : 1 = A_1. \quad (2.38)$$

Sista ekvationen ger alltså  $A_1 = 1$  första att  $A_2 = -A_1 = -1$  och slutligen andra att  $A_3 = -2A_1 - A_2 = -1$ . Vi får

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx. \quad (2.39)$$

Dessa tre integraler har vi studerat i (2.24) och (2.25). Vi får slutligen,

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + C. \quad (2.40)$$

**Exempel 2.10 (Primitiv till rationell funktion)** Bestäm primitivfunktionen till  $\frac{3x^2+1}{x^2+1}$ . Vi börjar med polynomdivision för att få en täljare av lägre grad än nämnaren:

$$\frac{3x^2+1}{x^2+1} = \frac{3x^2+3-3+1}{x^2+1} = 3 - \frac{2}{x^2+1}. \quad (2.41)$$

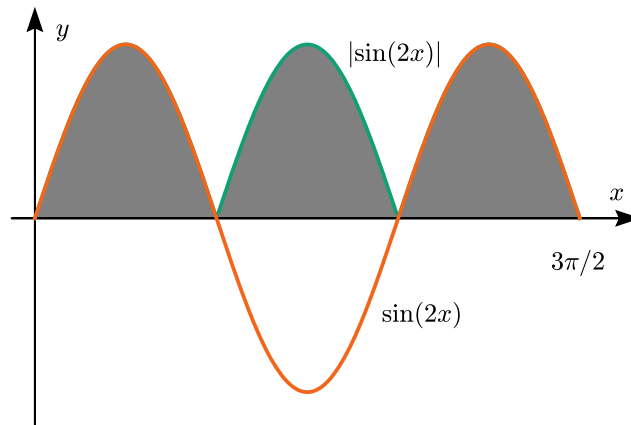
Formeln i (2.28) ger nu att

$$\int \frac{3x^2+1}{x^2+1} dx = 3x - 2 \arctan(x) + C. \quad (2.42)$$

Vi lämnar de analytiska metoderna för att bestämma primitivfunktioner och går vidare till tillämpningar inom längd, area och volym.

## 2.3 Båglängd, area och volym

Integralen används i många sammanhang. Areaberäkningar är den mest naturliga tillämpningen men även längd, volym, tyngdpunkt, sannolikheter och mycket annat bestäms med hjälp av integraler. Som integralen är definierad ger den arean mellan en funktion och  $x$ -axeln, med tecken. Vill man beräkna den verkliga arean mellan en given funktion  $f(x)$  och  $x$ -axeln måste man därför beräkna integralen av absolutbeloppet  $|f(x)|$ . Det görs oftast genom att dela upp integralen i delar där integranden har kontinuerlig derivata.



Figur 2.2: Funktionen  $\sin(2x)$  mellan  $x = 0$  och  $x = 3\pi/2$  och dess absolutbelopp, vars integral ger arean mellan funktionen och  $x$ -axeln.

**Exempel 2.11 (Areabestämning)** Bestäm arean mellan  $f(x) = \sin(2x)$  och  $x$ -axeln mellan  $x = 0$  och  $x = \frac{3\pi}{2}$ , se figur 2.2. Genom att integrera absolutbeloppet av  $\sin(2x)$  får vi

$$\text{Arean} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin(2x)| dx \quad (2.43)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x) dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(2x) dx \quad (2.44)$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\pi/2} + \left[ \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_{\pi/2}^{\pi} - \left[ \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \quad (2.45)$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3. \quad (2.46)$$

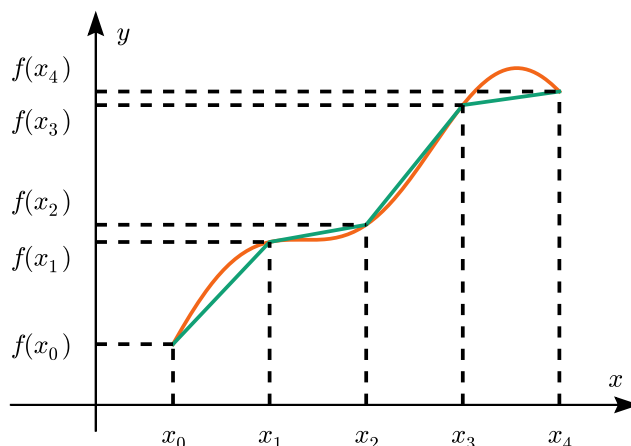
Man kan även använda integralen för att bestämma kurvors längd (båglängd).

**Sats 2.4 (Båglängd)** Låt  $f$  vara en kontinuerligt deriverbar funktion definierad på intervallet  $[a, b]$ . Funktionen graf  $G = \{(x, y) : y = f(x), x \in [a, b]\}$  är en kurva i planet. Kurvas längd ges av

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (2.47)$$

*Bevis.* Vi delar in  $[a, b]$  i  $n$  delintervall,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , och inför notationen  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Längderna av linjesegmenten mellan punkterna  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, \dots, n$ , ges av

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} \Delta x_i. \quad (2.48)$$



Figur 2.3: Approximation av båglängd med hjälp av linjesegment.

Medelvärdessatsen för derivator ger att det finns ett  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  sådant att

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i). \quad (2.49)$$

Vi får

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x_i. \quad (2.50)$$

Därmed är  $L_n$  en Riemann-summa för integralen  $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$  vars integrand är kontinuerlig. Vi låter nu  $n \rightarrow \infty$  så att  $\max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i \rightarrow 0$  vilket ger att

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \quad (2.51)$$

enligt sats 1.2. □

Notera att approximationen med ändligt många linjesegment alltid blir mindre än eller lika med kurvans längd,  $L_n \leq L$  för fixt  $n$ . Detta beror på att linjesegmentet är den kortaste sträckan mellan två punkter. Vi ger nu ett exempel på hur längden av en given kurva kan beräknas.

**Exempel 2.12 (Båglängd)** Bestäm längden av grafen  $y = x^3 + \frac{1}{12x}$  då  $x$  varierar mellan 1 och 2. Vi använder sats 2.4 och noterar att  $f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}$  med derivata  $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{12x^2}$ . Vi har att

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \left(3x^2 - \frac{1}{12x^2}\right)^2 = 1 + 9x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{144x^4} = \left(3x^2 + \frac{1}{12x^2}\right)^2. \quad (2.52)$$

Längden ges därför av

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{1}{12x^2}\right) dx = \left[x^3 - \frac{1}{12x}\right]_1^2 = 7 + \frac{1}{24}. \quad (2.53)$$



Exemplet är tillrättalagt eftersom den integranden vi till slut får är lätt att hitta primitivfunktion till. I många fall blir den uppkomna integralen inte enkel att bestämma. Vi får istället använda numeriska metoder för att beräkna en approximation.

Man kan även bestämma volymer med integraler. Vi låter en kropp som befinner sig mellan  $x = a$  och  $x = b$  ha tvärsnittsarean  $A(x)$ . Volymen ges då av tvärsnittsarean integrerad över området  $[a, b]$ .

**Sats 2.5 (Volym som integral av area)** Låt  $S$  vara en kropp i  $\mathbb{R}^3$  definierad mellan  $x = a$  och  $x = b$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ . Vidare anta att arean av tvärsnittet av  $S$  vid  $x$  ges av den kontinuerliga funktionen  $A(x) \geq 0$ . Då ges kroppens volymen  $V$  av

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (2.54)$$

*Bevis.* Låt  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  vara en partition av  $[a, b]$  i  $n$  delintervall,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Vidare låt  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , och approximerar volymen med parallella skivor av tjocklek  $\Delta x_i$ . Volymen av varje skiva  $\Delta V_i$  kommer ligga mellan den minimala arean gånger tjockleken  $\min_{[x_{i-1}, x_i]} A(x) \Delta x_i$  och den maximala arean gånger tjockleken  $\max_{[x_{i-1}, x_i]} A(x) \Delta x_i$ . Vi noterar därför att  $I_{\min}(A, P) \leq V \leq I_{\max}(A, P)$  där  $I_{\min}(A, P) = \sum_{i=1}^n \min_{[x_{i-1}, x_i]} A(x) \Delta x_i$  är den undre Riemann-summan av funktionen  $A(x)$  med partitionen  $P$  och, på motsvarande sätt,  $I_{\max}(A, P)$  är den övre Riemann-summan. Eftersom  $A(x)$  är kontinuerlig konvergerar båda Riemann-summorna mot samma värde enligt sats 1.2. Vi får därför att

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (2.55)$$

□

Denna teknik där sammanlagda volymen approximeras av volymselement som utgörs av skivor av kroppen kallas just skivning. Vi ger två exempel. Det första med cirkulär tvärsnittsarea och det andra med kvadratisk.

**Exempel 2.13 (Oändlig kropp med ändlig volym)** Bestäm volymen av den kropp som bildas då funktionen  $y = x^{-2}$  roterar runt  $x$ -axeln för  $x \geq 1$ . Vi noterar att genomskärningsarean beror av  $x$  som  $A(x) = \pi \cdot (x^{-2})^2$ . Vi får en generaliserad integral

$$V = \int_1^{\infty} A(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R A(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi \int_1^R x^{-4} dx = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{3}x^{-3} \right] = \frac{\pi}{3}. \quad (2.56)$$

Volymen av denna oändligt långa kropp är alltså ändlig.

**Exempel 2.14 (Keops pyramid)** Bestäm volymen av en pyramid med längd och bredd  $b = l = 230$  och höjd  $h = 139$ . Vi introducerar ett koordinatsystem med  $x$ -axeln pekande rakt ner från toppen av pyramiden med origo i toppen. Arean som funktion av  $x$  ges då av  $A(x) = b(x) \cdot l(x) = \frac{bx}{h} \cdot \frac{lx}{h} = \frac{bl}{h^2}x^2$ . Volymen ges av integralen av arean från  $x = 0$  till  $x = h$ :

$$V = \int_0^h A(x) dx = \frac{bl}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{blh}{3} = 2451033.333\dots \quad (2.57)$$

## 2.4 Rotationskroppar

Rotationskroppar är områden i  $\mathbb{R}^3$  som konstrueras genom att ett område i planet roterar runt en linje. Vi kommer studera rotation runt  $x$ -axeln och  $y$ -axeln av områden som begränsas av en given funktion  $f(x)$  och ett intervall på  $x$ - respektive  $y$ -axeln. Vi börjar med rotation runt  $x$ -axeln som vi redan sett i exempel 2.13.

**Sats 2.6 (Volym av en kropp som roterar runt  $x$ -axeln)** Givet en kontinuerlig funktion  $f \geq 0$  och ett intervall  $[a, b]$  låt området som begränsas av  $f$ ,  $x$ -axeln,  $x = a$  och  $x = b$  kallas  $R$ . Volymen av rotationskroppen som uppkommer då  $R$  roterar kring  $x$ -axeln ges av  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ .

*Bevis.* Vi använder sats 2.5 och låter  $A(x) = \pi f(x)^2$  eftersom arean av en cirkel är  $\pi r^2$  och cirkelns radie är  $r = f(x)$ . Vi får direkt  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ .  $\square$

**Exempel 2.15 (Volym av en kon)** Bestäm volymen av en kon med radie  $r$  och höjd  $h$ . Vi placerar spetsen i origo och bildar konen genom att rotera funktionen  $f(x) = \frac{rx}{h}$  runt  $x$ -axeln mellan  $x = 0$  och  $x = h$ . Enligt sats 2.6 ges volymen av

$$V = \pi \int_0^h f(x)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2} dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}. \quad (2.58)$$

Vi skivar alltså kroppen i tunna skivor för varje  $x$ -värde. Cirkelskivornas area ges av  $\pi f(x)^2$ . Vi kan även bestämma arean av en rotationskropp som bildas genom att en given funktion roterar runt  $x$ -axeln. Vi använder samma teknik som vid bestämningen av båg längd i sats 2.4.

**Exempel 2.16 (Area av yta)** Bestäm arean  $S$  av ytan som bildas då den kontinuerliga funktionen  $f$  mellan  $x = a$  och  $x = b$  roterar runt  $x$ -axeln. Längden av kurvan ges som bekant av gränsvärdet av längden av linjesegmenten då indelningen blir oändligt fin

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (2.59)$$

Arean som bildas av kurvan, då den roteras runt  $x$ -axeln, ges av linjesegmentens längd (i ett givet intervall  $[x_{i-1}, x_i]$ ) gånger omkretsen, som i gräns ges av  $2\pi|f(x)|$ . Vi får

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (2.60)$$

Vid rotation runt  $y$ -axeln bildar vi cylindriska skal vars omkrets och höjd är  $2\pi x$  respektive  $f(x)$ .

**Sats 2.7 (Volym av en kropp som roterar runt  $y$ -axeln)** Givet en kontinuerlig funktion  $f(x)$  och ett intervall  $[a, b]$  låt området som begränsas av  $f \geq 0$ ,  $x$ -axeln,  $x = a \geq 0$  och  $x = b$  kallas  $R$ . Volymen av rotationskroppen som uppkommer då  $R$  roterar kring  $y$ -axeln ges av  $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$ .

*Bevis.* Låt  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  vara en partition av  $[a, b]$  i  $n$  delintervall,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Vidare låt  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Vi studerar nu volymen av de cylindriska skal som uppkommer då volymselementet mellan  $f(x)$ ,  $x$ -axeln,  $x_{i-1}$  och  $x_i$  roterar runt  $y$ -axeln. För volymselement gäller  $\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) 2\pi x_{i-1} \Delta x_i \leq \Delta V_i \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) 2\pi x_i \Delta x_i$  alltså maximala (minimala) höjden gånger maximala (minimala) omkretsen gånger tjockleken  $\Delta x_i$  av ett cylindriskt skal. Både övre och undre begränsningen är Riemann-summor som konvergerar mot

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx, \quad (2.61)$$

enligt sats 1.2 eftersom  $f(x)$  är kontinuerlig. □

**Exempel 2.17 (Volym av en torus)** Bestäm volymen av en torus som definieras av att en cirkel i punkten  $(b, 0)$  med radie  $a$  roterar runt  $y$ -axeln. Först måste vi hitta en funktion som beskriver torusen. Vi studerar endast den övre halvan, vi låter alltså  $y \geq 0$ . Vi vet att  $(x - b)^2 + f(x)^2 = a^2$ . Eftersom vi tittar på positiva  $y$ -värden får vi  $f(x) = \sqrt{a^2 - (x - b)^2}$ . Sats 2.7 ger nu att

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_{b-a}^{b+a} x \sqrt{a^2 - (x - b)^2} dx, \quad (2.62)$$

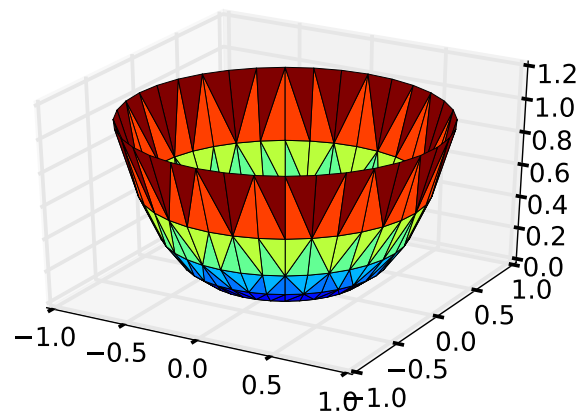
där den första tvåan kommer av att integralen bara innefattar halva torusen. Vi använder variabelsubstitutionen  $u = x - b$  och får

$$V = 4\pi \int_{-a}^a (u + b) \sqrt{a^2 - u^2} du = 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - u^2} du = 4\pi b \frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 b a^2, \quad (2.63)$$

eftersom  $u\sqrt{a^2 - u^2}$  är udda och  $\sqrt{a^2 - u^2}$  beskriver en halvcirkel vars area är  $\frac{\pi a^2}{2}$ .

**Exempel 2.18 (Rotationsvolym)** Bestäm volymen av en skål som definieras av att funktionen  $f(x) = x^4$  mellan  $x = 0$  och  $x = 1$  roterar runt  $y$ -axeln. Vi noterar att funktionen som beskriver skålens djup som funktion av radien är  $f(x) = 1 - x^4$ . Sats 2.7 ger att

$$V = 2\pi \int_0^1 x(1 - x^4) dx = 2\pi \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}. \quad (2.64)$$



Figur 2.4: Funktionen  $x^4$  roterad runt  $y$ -axeln från exempel 2.18.

## 2.5 Numeriska metoder

Numeriska metoder för att beräkna integraler bygger på samma princip som Riemann-summor. Intervallet delas in i delintervall och på varje delintervall approximeras integralen av en enkel funktion vars integral kan beräknas. Vi presenterar tre metoder där rektanglar, trapetsor och andragradspolynom används som approximation på delintervallen.

Mittpunktsmetoden innebär, som det låter, att integralen approximeras med en Riemann-summa där funktionen evalueras i mittpunkten på varje delintervall.

**Definition 2.1 (Mittpunktsmetoden)** Låt  $f$  vara kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$ . Vi delar in intervallet  $[a, b]$  i  $n$  delintervall med punkterna  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  och inför notationen  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Mittpunktsmetodens approximation av integralen ges av

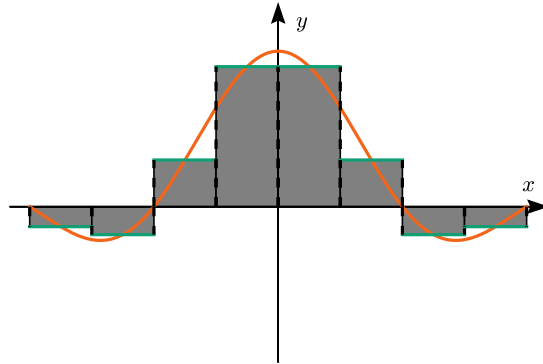
$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \Delta x_i. \quad (2.65)$$

I figur 2.5 illustrerar vi mittpunktsmetoden genom att approximera  $\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$  med 8 lika stora delintervall. Bokens framsida är en annan illustration av mittpunktsmetoden. Vi ser tydligt hur mittpunkten på varje intervall avgör höjden på rektangeln vars area approximerar bidraget till integralen.

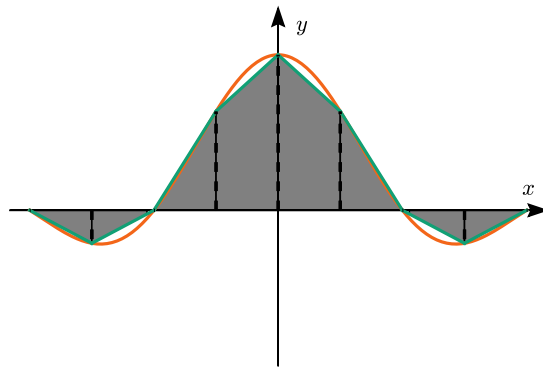
Trapetsmetoden innebär att funktionen istället approximeras med ett linjärt polynom på varje delintervall, vilket resulterar i en fyrhörning (trapets) vars area vi kan bestämma, se figur 2.6.

**Definition 2.2 (Trapetsmetoden)** Låt  $f$  vara kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$ . Vi delar in intervallet  $[a, b]$  i  $n$  delintervall med punkterna  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  och inför notationen  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Trapetsmetodens approximation av integralen ges av

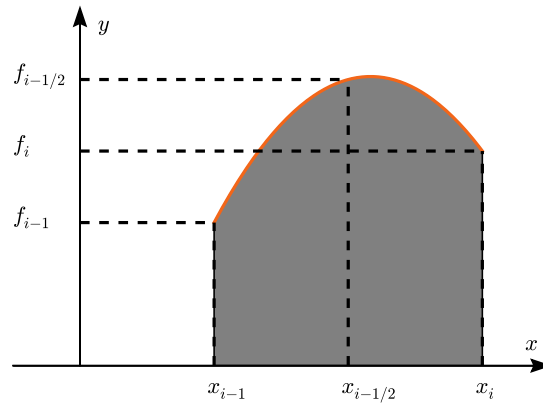
$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i. \quad (2.66)$$



Figur 2.5: Mittpunktsmetoden för att approximera integralen av  $\frac{\sin(x)}{x}$  mellan  $-2\pi$  och  $2\pi$ .



Figur 2.6: Trapetsmetoden för att approximera integralen av  $\frac{\sin(x)}{x}$  mellan  $-2\pi$  och  $2\pi$ .



Figur 2.7: Beräkning av arean under en godtycklig kvadratisk funktion.

Slutligen har vi Simpsons formel som använder andragradspolynom för att approximera integralen. Här krävs en härledning eftersom arean av ett område mellan en kvadratisk funktion och  $x$ -axeln, uttryckt i funktionens värden i ändpunkterna och mittpunkten inte är uppenbar. Vi studerar ett godtyckligt intervall  $[x_{i-1}, x_i]$ . I figur 2.7 ser vi ytan under det kvadratiske polynomet som vi vill bestämma. Vi låter mittpunkten på intervallet vara  $x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  och  $h = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$  intervallets längd. Vi studerar ett godtyckligt andragradspolynom

$$y(x) = A(x - x_{i-1/2})^2 + B(x - x_{i-1/2}) + C. \quad (2.67)$$

Vi har valt att förskjuta med  $x_{i-1/2}$  för att  $C$  ska bli enkel att räkna ut och integralen ska bli oberoende av  $B$ . Vi ser direkt att  $f_{i-1/2} = y(x_{i-1/2}) = C$ . Genom att sätta in  $x_{i-1}$  och  $x_i$  får vi,

$$f_i = y(x_i) = A(x_i - x_{i-1/2})^2 + B(x_i - x_{i-1/2}) + C = A\frac{h^2}{4} + B\frac{h}{2} + f_{i-1/2} \quad (2.68)$$

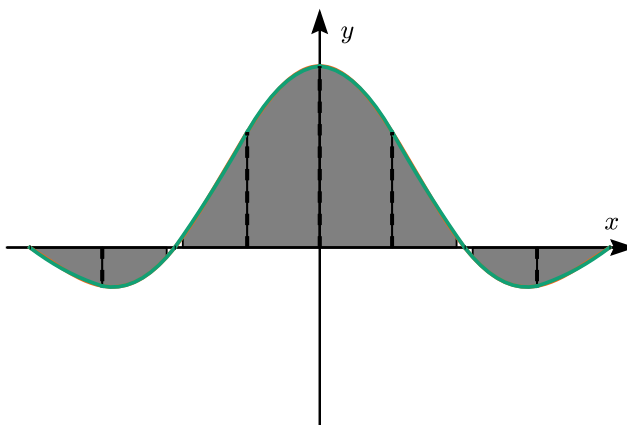
$$f_{i-1} = y(x_{i-1}) = A(x_{i-1} - x_{i-1/2})^2 + B(x_{i-1} - x_{i-1/2}) + C = A\frac{h^2}{4} - B\frac{h}{2} + f_{i-1/2}. \quad (2.69)$$

Adderar respektive subtraherar vi de båda uttrycken får vi

$$f_i + f_{i-1} = A\frac{h^2}{2} + 2f_{i-1/2}, \quad (2.70)$$

$$f_i - f_{i-1} = Bh. \quad (2.71)$$

Vi drar slutsatsen att  $A = \frac{2(f_{i-1} - 2f_{i-1/2} + f_i)}{h^2}$  och  $B = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$ . Nu återstår det att integrera  $y(x)$  på



Figur 2.8: Simpsons formel för att approximera integralen av  $\frac{\sin(x)}{x}$  mellan  $-2\pi$  och  $2\pi$ .

intervallet  $[x_{i-1}, x_i]$ . Vi får med variabelsubstitutionen  $t = x - x_{i-1/2}$  att

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} A(x - x_{i-1/2})^2 + B(x - x_{i-1/2}) + C dx \quad (2.72)$$

$$= \left\{ t = x - x_{i-1/2}, \frac{dt}{dx} = 1 \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} At^2 + Bt + C dt \quad (2.73)$$

$$= \left[ \frac{At^3}{3} + \frac{Bt^2}{2} + Ct \right]_{-h/2}^{h/2} \quad (2.74)$$

$$= \frac{Ah^3}{12} + 0 + Ch \quad (2.75)$$

$$= \frac{2(f_{i-1} - 2f_{i-1/2} + f_i)}{12} h + f_{i-1/2} h \quad (2.76)$$

$$= \frac{f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i}{6} h. \quad (2.77)$$

Vi är nu redo att definiera Simpsons formel där bidraget till integralen från varje delintervall är just  $\frac{f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i}{6} \Delta x_i$ .

**Definition 2.3 (Simpsons formel)** Låt  $f$  vara kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$ . Vi delar in intervallet  $[a, b]$  i  $n$  delintervall med punkterna  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  och inför notationen  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Simpsons formel ger att

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i)}{6} \Delta x_i. \quad (2.78)$$

Vi upprepar exemplet med  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  också för Simpsons formel. Det är tydligt för ögat att Simpsons formel ger den bästa approximationen. Även om numeriska metoder bäst lämpar sig för datorberäkning kan man utföra beräkningarna för hand om antalet delintervall är få. Vi ger två exempel.

**Exempel 2.19 (Trapetsmetoden)** Vi vill integrera  $1 + \sin^2(x)$  från 0 till  $2\pi$  med trapetsmetoden med 6 delintervall. Vi noterar att  $x_i = \frac{i\pi}{3}$ ,  $i = 0, \dots, 6$ , och får

$$T_6 = \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \sin^2 \left( \frac{(i-1)\pi}{3} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \sin^2 \left( \frac{i\pi}{3} \right) \right) \right] \quad (2.79)$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^5 \sin^2 \left( \frac{i\pi}{3} \right) \quad (2.80)$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{3} \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) = 3\pi. \quad (2.81)$$

**Exempel 2.20 (Simpsons formel)** Vi låter nu  $f(x) = x^3 + 1$  och använder Simpsons formel med ett delintervall för att approximera  $\int_0^1 x^3 + 1 dx$ . Med  $x_0 = 0$ ,  $x_{1/2} = \frac{1}{2}$  och  $x_1 = 1$  får vi

$$S_1 = \frac{f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + f(x_1)}{6} = \frac{1 + 4 \cdot 9/8 + 2}{6} = \frac{5}{4}. \quad (2.82)$$

Vi noterar att Simpsons formel ger det exakta värdet  $\int_0^1 x^3 + 1 dx = \frac{5}{4}$ . Det gäller i allmänhet att Simpsons formel är exakt för polynom till och med grad 3.

## 2.6 Konvergens av numeriska approximationer

Eftersom de numeriska metoderna (oftast) ger approximativa värden på integralen är det viktigt att analysera felet i approximationen i termer av antal element i partitionen. Vi antar för enkelhets skull att intervallet  $[a, b]$  är indelat i  $n$  lika stora delintervall. Idén vi använder i beviset fungerar på samma sätt om delintervallen har olika längd. Vi presenterar feluppskattningar för mittpunktsmetoden, trapetsmetoden och Simpsons formel.

**Sats 2.8 (Feluppskattningar)** Låt  $f$  vara kontinuerlig  $[a, b]$  med kontinuerlig andraderivata begränsad av  $K \geq 0$ . Vi delar in  $[a, b]$  i  $n$  lika stora delintervall. Då gäller att

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}, \quad (2.83)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}. \quad (2.84)$$

Om  $f$  är fyra gånger kontinuerligt deriverbar och  $|f^{(4)}(x)| \leq K$  så gäller även

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{K(b-a)^5}{2880n^4}. \quad (2.85)$$



*Bevis.* Vi bevisar resultatet för mittpunktsmetoden. Bevisen för trapetsmetoden och Simpsons formel följer samma idé. Vi studerar ett delintervall  $[x_{i-1}, x_i]$  och låter  $h = x_i - x_{i-1}$ . Taylors formel av ordning 1, sats 5.3 i del I, ger för  $x, \bar{x} \in [x_{i-1}, x_i]$  att

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - \bar{x})^2, \quad (2.86)$$

för något  $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ . Med  $\bar{x} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  och eftersom  $|f''(\xi)| \leq K$  får vi

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) - f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right| \leq \frac{K}{2} \left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^2, \quad (2.87)$$

för alla  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . Vi har att

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)h \right| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) dx \right| \quad (2.88)$$

$$= \left\{ \text{vi använder att } \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) dx = 0 \right\} \quad (2.89)$$

$$= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) - f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) dx \right| \quad (2.90)$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| f(x) - f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) - f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right| dx \quad (2.91)$$

$$\leq \frac{K}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^2 dx = \left\{ y = x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right\} \quad (2.92)$$

$$= \frac{K}{2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \quad (2.93)$$

$$= \frac{Kh^3}{24}. \quad (2.94)$$

Vi summerar nu över  $i = 1, \dots, n$ , använder  $h = \frac{b-a}{n}$  och får

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)h \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{Kh^3}{24} = \frac{K(b-a)^3}{24n^2}. \quad (2.95)$$

□

Eftersom felet i mittpunktsmetoden avtar som  $\frac{1}{n^2}$  då  $n \rightarrow \infty$  säger vi att det är en andra ordningens metod. Med ordo notationen kan vi säga att felet är  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  då  $n \rightarrow \infty$ , se definition 5.3 i del I. Vi ser även att mittpunktsmetoden integrerar linjära funktioner exakt eftersom  $K = 0$ . Detsamma gäller trapetsmetoden som också är en andra ordningens metod. Simpsons formel är av fjärde ordningen och integrerar kubiska (och lägre ordningens) polynom exakt. Vi avslutar detta kapitel med en konvergensstudie där vi jämför de tre metoderna.

$n$	Mittpunktsmetoden	Trapetsmetoden	Simpsons formel
8	0.03481342871	0.06782650786	0.00060011652
16	0.00830743287	0.01650653957	0.00003610873
32	0.00205313047	0.00409955335	0.00000223587
64	0.00051181485	0.00102321144	0.00000013942
128	0.00012786222	0.00025569829	0.00000000871
256	0.00003195984	0.00006391804	0.00000000055
512	0.00000798961	0.00001597910	0.00000000004

Tabell 2.2: Felet i approximationen för olika antal delintervall.

**Exempel 2.21 (Konvergens för mittpunktsmetoden, trapetsmetoden och Simpsons formel)**

Vi jämför de tre metoderna för olika antal delintervall  $n$ . Låt  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  på intervallet  $[-2\pi, 2\pi]$  och beräkna en approximation till  $I = \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$ .

Tabellen visar beloppet av felet mellan approximationerna och ett referensvärde med 11 korrekta decimaler  $I = 2.83630315227$ . Vi ser att felet för mittpunktsmetoden och trapetsmetoden minskar med en faktor 4 när antal delintervall  $n$  dubblas medan för Simpsons formel minskar felet med en faktor 16. Det bekräftar teorin som säger att mittpunktsmetoden och trapetsmetoden konvergerar som  $\frac{1}{n^2}$  medan Simpsons formel som  $\frac{1}{n^4}$ . Det är viktigt att påpeka att Simpsons formel behöver två nya funktionsevalueringar per intervall medan de andra metoderna behöver en. Även om vi tar detta i beaktande ser vi i tabellen att Simpsons formel ger bäst approximation för samma antal evalueringar.

## Övningar

### 2.1 Variabelsubstitution och partiell integration

**Övning 2.1** Bestäm integralen.

$$(a) \int_1^2 \sqrt{x-1} dx \quad (b) \int_0^2 2xe^{x^2} dx \quad (c) \int_0^\pi \cos(x)^2 dx \quad (d) \int_1^e \frac{2\ln(x)}{x} dx$$

**Övning 2.2** Bestäm integralen.

$$(a) \int_1^4 \frac{\cos(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}} dx \quad (b) \int_0^{3\pi/2} \sin^2(x) \cos^3(x) dx \quad (c) \int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{2}{\tan(2x)} dx$$

$$(d) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-1}{(x^2+1)(\arctan(x))^2} dx$$

**Övning 2.3** Bestäm integralen med hjälp av inverssubstitution.

$$(a) \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx \quad (b) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad (c) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-3x^2)^{3/2}} dx$$

$$(d) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx, \text{ givet att } \int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right) + C$$

**Övning 2.4** Bestäm integralen.

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx \quad (b) \int_1^{10} t \ln(t) dt \quad (c) \int_1^e \ln(t) dt \quad (d) \int_0^2 x \arctan(x) dx$$

**Övning 2.5** Bestäm integralen.

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin(3x) dx \quad (b) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^x \cos(x) dx \quad (c) \int \sin(\ln(x)) dx \quad (d) \int e^{ax} x^5 dx$$

### 2.2 Integration av rationella funktioner

**Övning 2.6** Bestäm primitivfunktionen.

$$(a) \int \frac{3}{1-2x} dx \quad (b) \int \frac{2}{(x+2)(x-2)} dx \quad (c) \int \frac{dx}{bx^2+1} \quad (d) \int \frac{x+1}{x^2+9} dx$$

**Övning 2.7** Bestäm primitivfunktionen.

$$(a) \int \frac{x+2}{x^2+x} dx \quad (b) \int \frac{1}{x^3+4x} dx \quad (c) \int \frac{dx}{4x^2-12x+9} \quad (d) \int \frac{x-1}{(x-3)^2} dx$$

**Övning 2.8** Bestäm primitivfunktionen.

$$(a) \int \frac{x-1}{x-2} dx \quad (b) \int \frac{x^3-1}{x-2} dx \quad (c) \int \frac{x^2-x+6}{(x-2)^2} dx \quad (d) \int \frac{2x^4+3x^3-x^2-8x+3}{x^2-3} dx$$

**Övning 2.9** Bestäm primitivfunktionen.

$$(a) \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx \quad (b) \int \frac{x}{x^2-4x+8} dx \quad (c) \int \frac{1}{x^2+5x+6} dx \quad (d) \int \frac{4x^2-10x+9}{x^3-8x^2+25x-26} dx$$

**Övning 2.10** Bestäm primitivfunktionen.

$$(a) \int \frac{2x^3-7x}{x^4-8x^2+16} dx \quad (b) \int \frac{2x^4-2x^3+8x^2-17x+51}{x^3-x^2-x-15} dx \quad (c) \int \frac{2x^3-2x^2+x+1}{(1-2x^2)^2} dx$$

$$(d) \int \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 5}{(x-2)^4} dx$$

### 2.3 Beräkning av båglängd, area och volym

**Övning 2.11** Bestäm arean mellan  $f$  och  $x$ -axeln på intervallet.

- (a)  $f(x) = x \sin(x^2)$  på  $[0, \sqrt{2\pi}]$     (b)  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  på  $[\frac{1}{2}, 2]$   
 (c)  $f(x) = \cos(x)(\frac{1}{2} - \sin^2(x))$  på  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$     (d)  $f(x) = x \sin(x)$  på  $[0, 2\pi]$

**Övning 2.12** Bestäm kurvans längd.

- (a)  $y = 3x + 1, x \in [1, 2]$     (b)  $y = \frac{2x^{3/2}}{3}, x \in [-1, 0]$     (c)  $y = kx, x \in [0, b]$   
 (d)  $y = x\sqrt{4x}, x \in [0, \frac{1}{9}]$

**Övning 2.13** Bestäm kurvans längd.

- (a)  $y = \ln(x) - \frac{x^2}{8}, x \in [1, 3]$     (b)  $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{8x}, x \in [1, 2]$     (c)  $y = \frac{x^{3/2} - 12\sqrt{x}}{6}, x \in [0, 4]$   
 (d)  $y = \frac{1}{4}(\frac{x^2}{2a} - a \ln(x)), x \in [1, t]$

**Övning 2.14** Bestäm volymen genom integration.

- (a) En kropp som är 3 cm hög. Tvärsnittet på höjden  $y$  från basen är kvadratisk med sidan  $2y$ .  
 (b) Ett symmetriskt timglas (uppbyggt av två likadana koner med topparna riktade mot varandra) med höjden 10 cm och cirkulär bottenarea  $100 \text{ cm}^2$ .  
 (c) En liksidig tetraeder med avståndet  $h$  mellan två motstående kanters mittpunkter.  
 (d) En kropp som sträcker sig från  $z = 0$  till  $z = h$  och har rektangulärt tvärsnitt med ena sidan  $z$  och andra sidan  $\frac{1}{z^2+1}$ .

### 2.4 Rotationskroppar

**Övning 2.15** Bestäm volymen då området roteras runt  $x$ -axeln.

- (a)  $0 < x < 2, 0 < y < x^2$     (b)  $0 < x < 1, 0 < y < x^2 + x$   
 (c)  $0 < x < \frac{\pi}{4}, \sin(x) - 1 < y < 0$     (d)  $0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \sqrt{x}e^x$

**Övning 2.16** Bestäm volymen då området roteras runt  $y$ -axeln.

- (a)  $1 < x < e, 0 < y < \frac{1}{x^2}$     (b)  $0 < x < a, 0 < y < \cos(x^2)$     (c)  $0 < x < 2, x^2 < y < 4$   
 (d)  $1 < x < 3, 0 < y < \frac{1}{x^2+3}$

**Övning 2.17** Ett område definierat av  $0 < x < 1$  och  $x^2 < y < x$  roteras runt den givna axeln. Bestäm volymen.

- (a)  $y = 0$     (b)  $x = 0$     (c)  $x = -2$     (d)  $y = 2$

**Övning 2.18** Området roteras runt  $y$ -axeln. Bestäm volymen.

- (a) En triangel med hörn i  $[1, 0], [3, 0], [1, 1]$     (b) En kvadrat med sidan 3 och mittpunkten i  $x = 5$   
 (c) En halvcirkel ( $x \geq 0$ ) med radie 2 i origo.    (d) En halv ellips med lodräta halvaxeln 1 i  $y$ -axeln och vågräta halvaxeln 2.

## 2.5 Numeriska metoder

**Övning 2.19** Beräkna en approximation av  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  med  $n$  lika långa delintervall. (Jämför med det exakta svaret  $\ln 2 \approx 0.69315$ .)

- (a) Mittpunktsmetoden,  $n = 2$    (b) Trapetsmetoden,  $n = 2$   
 (c) Simpsons formel,  $n = 1$    (d) Simpsons formel,  $n = 2$

**Övning 2.20** Beräkna en approximation av integralen med två lika långa delintervall.

- (a)  $\int_0^\pi \sin(x) dx$  med trapetsmetoden   (b)  $\int_0^1 x^2 dx$  med mittpunktsmetoden  
 (c)  $\int_0^1 x^2 - x^3 dx$  med mittpunktsmetoden   (d)  $\int_0^1 x^3 - 2x dx$  med Simpsons formel

**Övning 2.21** Beräkna en approximation av integralen med fyra lika långa delintervall.

- (a)  $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$  med mittpunktsmetoden   (b)  $\int_{-3}^5 x^2 dx$  med Simpsons formel  
 (c)  $\int_1^5 \ln x dx$  med Simpsons formel   (d)  $\int_8^{40} \frac{x-16}{x} dx$  med trapetsmetoden

**Övning 2.22** Använd trapetsmetoden på  $\int_0^{64} \sqrt{x} dx$  med intervall enligt partitionen  $P$ .

- (a)  $P = \{0, 16, 64\}$    (b)  $P = \{0, 4, 16, 64\}$    (c)  $P = \{0, 1, 25, 64\}$   
 (d)  $P = \{0, 16, 32, 48, 64\}$

## 2.6 Konvergens av numeriska approximationer

**Övning 2.23** Bestäm en övre gräns för felet i approximationen av  $\int_0^{1/2} x^4 dx$ .

- (a)  $T_1$    (b)  $S_1$    (c)  $M_1$    (d)  $T_2$

**Övning 2.24** Beräkna approximationerna och det faktiska felet i förra uppgiften.

**Övning 2.25** Bestäm en övre gräns för felet i approximationen.

- (a)  $M_3 \approx \int_1^e \ln(x^2) dx$    (b)  $S_2 \approx \int_0^\pi -\sin(x) dx$    (c)  $T_4 \approx \int_1^5 -x^3 dx$   
 (d)  $M_{10} \approx \int_0^2 4x^3 - x^4 dx$

## Problem

## 2.1 Variabelsubstitution och partiell integration

**Problem 2.1** Ge en rekursionsformel som uttrycker  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$  i termer av  $I_{n-1}$  och bestäm  $I_4$ .

**Problem 2.2** Visa att  $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau) d\tau$ . En sådan integral kallas fältningen av  $f$  och  $g$ .

### 2.2 Beräkning av båglängd, area och volym

**Problem 2.3** Bestäm arean av en sfär med radie 1.

**Problem 2.4** För vilka värden på  $\lambda$  är volymen som uppkommer då funktionen  $x^\lambda$  roterar runt  $x$ -axeln, mellan  $x = 1$  och oändligheten, ändlig?

### 2.3 Rotationskroppar

**Problem 2.5** Låt enhetscirkeln i origo rotera kring linjen  $y = 5 - x$ . Bestäm volymen av den uppkomna rotationskroppen.

**Problem 2.6** Bestäm volymen av kroppen som bildas då en liksidig triangel med en sida parallell med  $x$ -axeln, höjd 2 och mittpunkten i  $x = 2$ , roterar kring  $y$ -axeln.

### 2.4 Numeriska metoder

**Problem 2.7** Visa att  $S_n = \frac{T_n + 2M_n}{3}$ .

**Problem 2.8** Approximera integralen  $\int_1^2 x^3 dx$  med trapetsmetoden med två delintervall  $[1, t]$  och  $[t, 2]$ . Välj  $t$  så att felet blir så litet som möjligt.

### 2.5 Konvergens av numeriska approximationer

**Problem 2.9** Visa att felet i approximationen  $T_1 \approx \int_0^h f(x) dx$  kan begränsas av  $Kh^3/12$  där  $K$  är en begränsning av  $\max_{x \in [0, h]} |f''(x)|$ .

**Problem 2.10** Simpsons formel integrerar exakt för kubiska polynom. Verifiera detta för funktionen  $x^3$  på ett godtyckligt delintervall  $[a, b]$ .

# 3. Ordinära differentialekvationer

3.1	Introduktion till differentialekvationer	49
3.2	Existens och entydighet	51
3.3	Första ordningens ODE	55
3.4	Andra ordningens ODE	59
3.5	Linjära ODE	61
3.6	Analytiska lösningar till andra ordningens ODE	63

*En differentialekvation är en ekvation för bestämning av en obekant funktion, som beror av en eller flera oberoende variabler, där funktionen själv förekommer tillsammans med dess derivator. Differentialekvationer används för att modellera en stor mängd fenomen i naturen och samhället. De grundläggande fysikaliska naturlagarna som beskriver mekanik, elektromagnetism och kvantfysik är till exempel alla formulerade som differentialekvationer. Strukturmekanik och fluidodynamik, kemiska processer, biologiska modeller, optionsprissättning är andra exempel områden där differentialekvationer är oundgängliga. En ordinär differentialekvation (ODE) är en differentialekvation där den obekanta funktionen bara beror av en oberoende variabel. Ofta är denna variabel tiden. I detta kapitel studerar vi existens och entydighet av lösning till ODE samt analytiska tekniker för att lösa ordinära differentialekvationer.*

## 3.1 Introduktion till differentialekvationer

Vi börjar detta kapitel med ett exempel. Vi vill studera hur en kropp som släpps mot marken faller under inverkan av gravitation och luftmotstånd. Den sökta obekanta funktionen är avståndet till marken  $x$  som funktion av den oberoende variabeln tiden  $t$ . Differentialekvationen som modellerar detta förlopp är Newtons andra lag.

**Exempel 3.1 (Fritt fall)** Vi studerar en kropp med massa  $m$  som släpps från en höjd  $h$  över marken. Newtons andra lag ger en relation mellan kroppens massa  $m$ , acceleration  $a(t)$  och de yttre krafter den som påverkas av  $F(t)$ . Accelerationen är tidsderivatan av hastigheten  $v(t)$  och hastigheten är i sin tur derivatan av positionen  $x(t)$  det vill säga höjden över marken. Vi har att

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t). \quad (3.1)$$

En kropp som faller påverkas av gravitationskraften  $-mg$  (som ökar farten i negativ riktning, alltså neråt) och luftmotståndet (som minskar farten i negativ riktning) som antas vara proportionell mot

hastigheten  $kv(t)$  med en proportionalitetskonstant  $k > 0$ . Vi får följande differentialekvation för hastigheten  $v(t)$  (som kommer ha negativt tecken)

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg - kv, \quad v(0) = 0. \quad (3.2)$$

Notera att  $-kv$  kommer vara positiv eftersom  $k$  är positiv och kommer därför verka i motsatt riktning mot  $-mg$ . Villkoret  $v(0) = 0$  kallas begynnelsevillkor och innebär att objektet släpps utan att få någon begynnelsehastighet. Ekvation (3.2) är alltså en differentialekvation med lösning  $v(t)$ , som är en funktion av tiden  $t$ . Vi noterar att en förstaderivata av lösningen samt lösningen själv ingår som termer i ekvationen. Vi återkommer till hur lösningen kan bestämmas senare, när vi utvecklat rätt redskap för det. Om vi för tillfället antar att vi kan bestämma funktionen  $v(t)$  och vill bestämma objektets position har vi relationen  $\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$ . Begynnelsevillkoret ges av  $x(0) = h$  eftersom objektet befinner sig på höjd  $h$  vid tiden  $t = 0$ . Om vi integrerar båda sidor ges positionen som funktion av tiden av

$$x(t) = h + \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Om det bara finns en oberoende variabel är differentialekvationen alltså ordinär. Om det finns flera är differentialekvationen partiell. Exempel på oberoende variabler är tid och rumskoordinater.

**Definition 3.1 (Ordinär differentialekvation)** En ordinär differentialekvation är en differentialekvation som bara innehåller derivator med avseende på en variabel.

**Definition 3.2 (Partiell differentialekvation)** En partiell differentialekvation är en differentialekvation som innehåller derivator med avseende på flera variabler.

**Exempel 3.2 (Vågekvationen)** Ett exempel på en partiell differentialekvation är den endimensionella vågekvationen som beskriver longitudinella vågor i en endimensionell stav

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \quad (3.4)$$

där  $c$  är våghastigheten. De oberoende variablerna är tiden  $t$  och rumskoordinaten  $x$ . Lösningen  $u(x, t)$  beskriver förskjutning i  $x$ -led som funktion av  $x$  och  $t$ . Vi kommer studera denna typ av differentialekvationer i del IV.

Ett annat sätt att klassificera differentialekvationer är ekvationens ordning. Det är högsta derivatan som ingår i ekvationen som avgör ordningen.

**Definition 3.3 (Ordning)** En differentialekvation där högsta derivatan som förekommer är en  $n$ :te derivata, har ordning  $n$ .



**Exempel 3.3 (Högre ordningens ODE)** De ordinära differentialekvationerna

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx} + u(x) = \cos(x), \quad (3.5)$$

$$\frac{d^3u(x)}{dx^3} + u(x)^4 = \sin(x), \quad (3.6)$$

är av ordning 2 respektive 3.

## 3.2 Existens och entydighet

En viktig klass av differentialekvationer är de ordinära differentialekvationerna av första ordningen. För dessa ekvationer finns speciella numeriska och analytiska lösningstekniker. De numeriska metoderna återkommer vi till i kapitel 6. En första ordningens ODE kan formuleras på följande vis. Givet en funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  och en punkt  $(x_0, u_0)$ , söker vi en lösning  $u(x)$  till

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x > x_0, \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

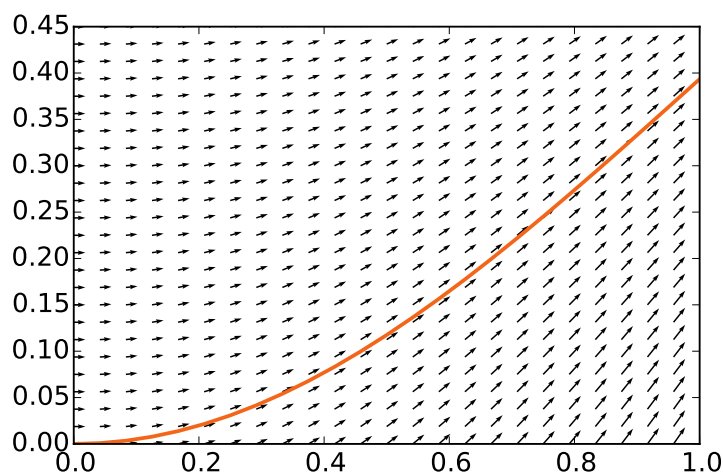
I figur 3.1 låter vi funktionen  $f(x, u) = x(1 - u)$  ange lutningen i varje punkt. Eftersom ekvationen säger att  $u'(x) = f(x, u)$  måste en lösning till ekvationen  $u(x)$  ha samma derivata (lutning) som figuren anger för alla  $x, u$ . Givet ett begynnelsevillkor  $u(0) = 0$  ges lösningen  $u(x)$  av den kurva som passerar genom punkten  $(x_0, u_0) = (0, 0)$  och har lutning enligt funktionen  $f(x, u)$ . Vi vill nu avgöra om ekvation (3.7) har en lösning och om den är entydig. På samma sätt som när vi studerade algebraiska ekvationer kommer vi använda fixpunktsiteration för att hitta en lösning. Till skillnad ifrån fallet då vi studerade  $f(x) = 0$  kommer dock lösningen här ges av en funktion  $u(x)$  och inte ett tal  $x$ . Därför behöver vi även formulera Banachs fixpunktssats för funktioner. Innan vi gör det måste vi dock definiera vad vi menar med storlek av funktioner vilket även ger ett mått på och avstånd mellan funktioner.

**Definition 3.4 (Norm av funktion)** Vi definierar normen (storleken) av en kontinuerlig funktion  $f \in C([a, b])$  på intervallet  $[a, b]$  som  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

Eftersom funktionen  $f$  är kontinuerlig vet vi att den har ett maximum på det slutna intervallet  $[a, b]$ . Avståndet eller avvikelsen mellan två funktioner  $f$  och  $g$  kan nu definieras som  $\|f - g\|$ . Om  $g$  är en approximation till  $f$  säger vi att avståndet  $\|f - g\|$  mäter felet i approximationen. Vi ger ett exempel på normen av en funktion.

**Exempel 3.4 (Norm)** Låt  $f(x) = 1 - x^2$  för  $x \in [0, 2]$ . Beräkna  $\|f\|$ . Vi behöver alltså beräkna maximum av  $|1 - x^2|$  på det givna intervallet. Vi ser att för  $0 \leq x \leq 1$  är  $|1 - x^2| \leq 1$ . För  $1 \leq x \leq 2$  är  $|1 - x^2| = x^2 - 1$  som är strängt växande. I högra ändpunkten får vi att  $|1 - 2^2| = 3$  vilket alltså är maximum. Därför har vi  $\|f\| = 3$ . Om intervallet ändras, ändras även maximum.

Givet ett mått på storlek av funktioner och avstånd mellan funktioner kan vi generalisera Banachs fixpunktssats till att också gälla funktioner. Avbildningen vars fixpunkt vi söker kommer nu istället gå från



Figur 3.1: Funktionen  $f(x, u) = x(1 - u)$  definierar lutningen i varje punkt. Kurvan är lösningen till  $u'(x) = f(x, u)$  med begynnelsevillkor  $u(0) = 0$ .

ett funktionsrum  $S$  in i sig själv, där  $S$  är alla funktioner som ligger i en omgivning till en given funktion  $u_0$  i meningen att felet  $\|u - u_0\| \leq r$  för alla  $u \in S$  och något  $r > 0$ .

**Sats 3.1 (Banachs fixpunktssats)** Givet  $u_0 \in C([a, b])$  och  $r > 0$ , låt  $S = \{u \in C([a, b]) : \|u - u_0\| \leq r\}$ . Låt vidare  $G$  vara en avbildning från  $S$  in i sig själv,  $G : S \rightarrow S$ . Om  $G$  är en kontraktion, alltså om det för något tal  $\gamma \in [0, 1)$  gäller att

$$\|G(u) - G(z)\| \leq \gamma \|u - z\|, \quad \forall u, z \in S, \quad (3.8)$$

så har  $G$  en unik fixpunkt  $u = G(u)$ ,  $u \in S$ . Dessutom konvergerar fixpunktsiterationen  $u_n = G(u_{n-1})$  givet  $u_0 \in S$ , alltså  $\|u - u_n\| \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ .

*Bevis.* Beviset liknar beviset av Banachs fixpunktsats i sats 6.3 i del I. Det bygger på att alla Cauchy-följder av funktioner konvergerar i  $C([a, b])$ .  $\square$

Vi är nu redo att presentera och bevisa Picards sats som garanterar entydig lösning till ekvation (3.7) i en omgivning av  $(x_0, u_0)$ .

**Sats 3.2 (Picards sats)** Vi studerar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Antag att  $f(x, u)$  är kontinuerlig på en rektangel  $R = \{(x, u) : a \leq x \leq b, c \leq u \leq d\}$  innehållande punkten  $(x_0, u_0)$  samt Lipschitz-kontinuerlig med avseende på  $u$  i  $R$ , det vill säga

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|, \quad (x, u_1), (x, u_2) \in R. \quad (3.10)$$

Då finns ett  $\delta > 0$  så att det existerar en unik lösning  $u(x)$  till begynnelsevärdesproblemet i intervallet  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ .

*Bevis.* Vi studerar följande ekvation vars derivata ger ekvation (3.9)

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt. \quad (3.11)$$

Om ekvation (3.11) har en lösning  $u(x)$  så är den deriverbar och löser även ekvation (3.9). Vi vill konstruera en sekvens lösningar  $\phi_n(x)$  som konvergerar till något  $\phi(x)$  som förhoppningsvis löser ekvationen. Vi åstadkommer detta med hjälp av fixpunktsiteration av integralekvationen (3.11).

Vi noterar att  $f$  är kontinuerlig på ett slutet område vilket innebär att funktionen är begränsad det vill säga  $|f(x, u)| \leq M$ ,  $(x, u) \in R$ , för något  $M > 0$ . Vi låter  $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  för något  $\delta > 0$  och bildar funktionsmängden  $S = \{\phi \in C(I) : \|\phi - u_0\| \leq r\}$ , med  $r = M\delta$ . Vi väljer ett  $\phi_0 \in S$  (till exempel den konstanta funktionen  $\phi_0(x) = u_0$ ) och definierar nästa värde, givet det föregående, som

$$\phi_n(x) = G(\phi_{n-1}(x)) := u_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Denna fixpunktsiteration kallas även Picarditeration. Funktionen  $G$  tar en funktion  $\phi_{n-1}(x)$  och ger tillbaka en annan funktion  $\phi_n(x)$ . Om  $\phi_{n-1}$  och  $f$  är kontinuerliga kommer  $f(t, \phi_{n-1}(t))$  att vara kontinuerlig och därmed integrerbar vilket innebär att integralen är definierad och  $\phi_n(t)$  är deriverbar (och kontinuerlig) eftersom den är primitivfunktion till den kontinuerliga funktionen  $f(x, \phi_{n-1}(x))$ . Vidare gäller att  $|\phi_n(x) - u_0| = |\int_{x_0}^x f(t, \phi_{n-1}) dt| \leq M|x - x_0| \leq M\delta$  för  $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$  det vill säga  $\|\phi_n - u_0\| \leq M\delta$ . Alltså gäller att  $\phi_n(x) \in S$  och att  $G : S \rightarrow S$ . Dessutom har vi för  $v, w \in S$  att

$$\|G(v) - G(w)\| := \max_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} |G(v)(x) - G(w)(x)| \quad (3.13)$$

$$\leq \max_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \int_{x_0}^x |f(t, v(t)) - f(t, w(t))| dt \leq \delta L \|v - w\|, \quad (3.14)$$

eftersom  $f$  är Lipschitz-kontinuerlig med konstant  $L$ . För tillräckligt små  $\delta$  så att  $\epsilon L < 1$  innebär detta att  $G$  är en kontraktion. Banachs fixpunktssats 3.1 ger då att det finns en unik fixpunkt  $\phi$  som är entydig lösning till integralekvationen

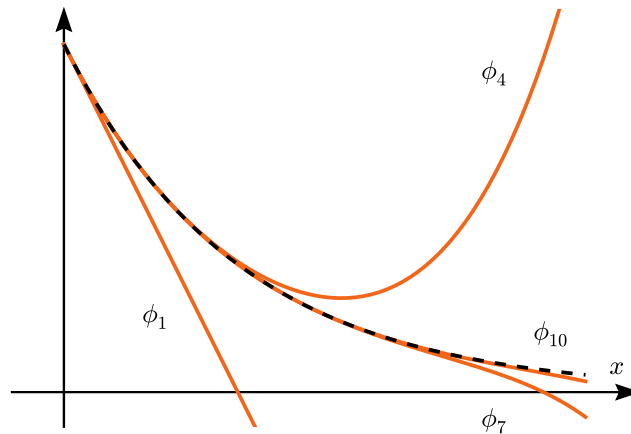
$$\phi(x) = G(\phi(x)) := u_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi) dt. \quad (3.15)$$

Eftersom  $\phi$  är uttryckt som en integral av en kontinuerlig funktion (som har en primitivfunktion) är  $\phi$  deriverbar och löser alltså det ursprungliga begynnelsevärdesproblemet med  $\phi(x_0) = u_0$ . Vi tar  $u = \phi$ . Lösningen är unik i  $S$ .  $\square$

För att illustrera satsen studerar vi ett konkret exempel.

**Exempel 3.5 (Fixpunktsiteration av funktion)** Bestäm lösningen till ekvationen  $u'(x) = f(x, u(x)) := -3u(x)$  med begynnelsevillkor  $u(0) = 1$ . Vi börjar med att integrera ekvationen från 0 till  $x$  och letar efter lösningar  $\phi \in C([0, 1])$  till integralekvationen

$$\phi(x) = u(0) + \int_0^x -3u(t) dt = 1 - 3 \int_0^x \phi(t) dt. \quad (3.16)$$



Figur 3.2: Vi ser funktionerna  $\phi_i(x)$ , för  $i = 1, 4, 7, 10$  tillsammans med den streckade exakta lösningen  $u(x) = e^{-3x}$ .

Vi ställer upp en fixpunktsiteration

$$\phi_n(x) = 1 - 3 \int_0^x \phi_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

När vi sätter in startgissningen  $\phi_0 = 1$  får vi  $\phi_1(t) = 1 - 3t$ ,  $\phi_2 = 1 - 3(x - \frac{3}{2}x^2)$ ,  $\phi_3 = 1 - 3(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{6}x^3) = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{6}x^3$  och i allmänna fallet

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-3x)^i}{i!}. \quad (3.18)$$

För  $x \in [0, 1]$  är detta Taylorutvecklingen av  $\phi(x) = e^{-3x}$  runt  $x = 0$ , som är definierad för alla  $x \in \mathbb{R}$ . Eftersom  $\phi(x)$  är deriverbar gäller  $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ . Alltså är  $u(x) = \phi(x) = e^{-3x}$  unik lösning till ekvationen. I figur 3.2 ser vi hur funktionerna  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_4(x)$ ,  $\phi_7(x)$ ,  $\phi_{10}(x)$  konvergerar mot funktionen  $\phi = e^{-3x}$  som är representerad med en streckad linje.

Följande exempel visar att lösningar till ODE kan upphöra att existera för ändliga värden på  $x$ . Detta illustrerar att trots att  $f$  är Lipschitzkontinuerlig på en godtyckligt stor rektangel  $R$  är det inte säkert att lösningen existerar mer än i en  $\delta$ -omgivning till begynnelsevärdet.

**Exempel 3.6 (Obegränsad lösning)** Ekvationen

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

har lösningen  $u(x) = \frac{1}{1-x}$  eftersom  $u'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$  och  $u(0) = 1$ . Trots att villkoren för satsen är uppfyllda existerar bara lösningen för  $0 \leq x < 1$ .

I nästa exempel visar vi att entydighet ej behöver hålla om  $f$  ej är Lipschitz-kontinuerlig.

**Exempel 3.7 (Ej unik lösning)** Ekvationen

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = 3u^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

har lösningen  $u(x) = 0$  men också till exempel lösningen  $u(x) = x^3$ . Högerledet  $f(x, u) = 3u^{2/3}$  är ej Lipschitz-kontinuerligt i någon omgivning av origo.

I kapitel 5 återkommer vi till Picards sats för system av ODE. Där formulerar och bevisar vi en version av satsen där  $f$  antas vara globalt Lipschitz-kontinuerlig. Under detta starkare antagande visar vi existens och entydighet av lösning för alla  $x \in \mathbb{R}$ .

### 3.3 Första ordningens ODE

Vi har nu avhandlat existens och entydighet av lösning till första ordningens ODE. Nu fokuserar vi på olika tekniker för att bestämma lösningar analytiskt under förenklade antaganden på  $f(x, u)$ .

Vi börjar med variabelseparation. Om  $f(x, u)$  kan skrivas som produkten av en funktion som beror bara på  $x$  och en som beror bara på  $u$  förenklas lösningsprocessen nämligen till att bestämma två primitivfunktioner.

**Sats 3.3 (Separabel ordinär differentialekvation)** Låt  $f(x)$  och  $g(u)$  vara kontinuerliga funktioner med primitivfunktioner  $F(x)$  och  $G(u)$ . Vidare låt  $u = u(x)$  vara lösning till den ordinära differentialekvationen

$$g(u) \frac{du}{dx} = f(x). \quad (3.21)$$

Lösningarna till differentialekvationen ges implicit av

$$G(u(x)) = F(x) + C, \quad (3.22)$$

där  $C$  är en godtycklig konstant. Om  $G(u)$  är inverterbar så gäller  $u(x) = G^{-1}(F(x) + C)$ .

*Bevis.* Kedjeregeln ger att

$$\frac{d}{dx}G(u(x)) = g(u)u'(x) = f(x). \quad (3.23)$$

Genom att bestämma primitivfunktion på båda sidor likhetstecknet får vi

$$G(u(x)) = F(x) + C. \quad (3.24)$$

□

Vi återgår till figur 3.1 och använder variabelseparation för att bestämma  $u(x)$ .

**Exempel 3.8 (Variabelseparation)** Vi studerar exemplet från figur 3.1,  $\frac{du}{dx} = x(1-u)$ ,  $u(0) =$

0. Vi skriver om ekvationen på följande sätt

$$\frac{1}{1-u} \frac{du}{dx} = x, \quad (3.25)$$

och använder sats 3.3 med  $g(u) = \frac{1}{1-u}$  och  $f(x) = x$  för att få

$$-\ln |1-u(x)| = \frac{x^2}{2} + C', \quad (3.26)$$

där  $C'$  är en konstant. Om vi tar exponentialfunktionen på båda sidor och flyttar om termer får vi

$$|1-u(x)| = Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (3.27)$$

där  $C = e^{-C'} > 0$ . Vi får att

$$u(x) = 1 \pm Ce^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.28)$$

Genom att sätta in  $u(0) = 0$  ser vi att  $C = 1$  och endast det negativa tecknet ger en lösning. Vi får alltså  $u(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Det är den kurvan vi ser i figur 3.1.

Vi går vidare med ännu ett exempel på variabelseparation.

**Exempel 3.9 (Variabelseparation)** Vi studerar en modell för population av djur med begränsad föda. Låt  $u(t)$  vara antalet individer approximerad av en kontinuerlig funktion,  $k$  reproduktionskonstant och  $L$  antal individer som kan leva på den föda som finns. Då kan följande första ordningens separabla differentialekvation användas för att beskriva dynamiken i  $u(t)$

$$\frac{du(t)}{dt} = ku(t)\left(1 - \frac{u(t)}{L}\right). \quad (3.29)$$

Eftersom ekvationen är separabel får vi att

$$\int \frac{Ldu}{u(L-u)} = \int k dt = kt + C', \quad (3.30)$$

för någon konstant  $C'$ . Vänsterledet kan skrivas om efter följande observation

$$\frac{L}{u(L-u)} = \frac{L-u+u}{u(L-u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{L-u}. \quad (3.31)$$

Vi får att

$$kt + C' = \int \frac{Ldu}{u(L-u)} = \int \frac{1}{u} du + \int \frac{1}{L-u} du = \ln |u| - \ln |L-u| = \ln \left| \frac{u}{L-u} \right|. \quad (3.32)$$

Vi tar exponentialfunktionen av båda sidor,

$$\left| \frac{u}{L-u} \right| = e^{C'} \cdot e^{kt} := Ce^{kt}. \quad (3.33)$$

Vi bakar in tecknet från absolutbeloppet i  $C$ , multiplicerar med  $L-u$  och löser ut  $u$

$$u(t) = \frac{CLE^{kt}}{1 + Ce^{kt}}. \quad (3.34)$$

Eftersom detta gäller för alla  $C$  och  $L$  är fixt kan vi baka in  $L$  i konstanten  $C' = CL$  och få

$$u(t) = \frac{C' e^{kt}}{1 + \frac{C'}{L} e^{kt}}. \quad (3.35)$$

Med denna formulering blir det tydligare att lösningen går mot  $C' e^{kt}$  då  $L \rightarrow \infty$ .

Det finns också situationer när ekvationen inte omedelbart är på rätt form för variabelseparation men där den kan skrivas om så att den blir på rätt form.

**Exempel 3.10** Låt  $u(x)$  vara lösning till ekvationen

$$\frac{du(x)}{dx} = f\left(\frac{u}{x}\right), \quad (3.36)$$

för en given funktion  $f$ . Skriv om ekvationen som en separabel differentialekvation. Vi inför en ny variabel  $v$  och låter  $u = xv(x)$ . Vi får då att

$$f(v) = f\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{du(x)}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}, \quad (3.37)$$

vilket omskrivet är en separabel differentialekvation i variablerna  $x$  och  $v$

$$(f(v) - v)^{-1} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}. \quad (3.38)$$

Givet lösningen till denna ekvation  $v(x)$  ges  $u(x) = xv(x)$ .

En annan viktig teknik för att lösa differentialekvationer av första ordningen är integrerande faktor. Denna metod kan bara användas om högerledet är linjärt i  $u$  vilket innebär att det kan skrivas som  $f(x, u(x)) = a_1(x)u(x) + a_0(x)$  för givna funktioner  $a_1(x)$  och  $a_0(x)$ .

**Sats 3.4 (Integrerande faktor)** Låt  $f$  vara en integrerbar funktion med primitivfunktion  $F$  och låt  $g$  vara kontinuerlig. Då gäller att lösningarna  $u$  till

$$u'(x) + f(x)u(x) = g(x) \quad (3.39)$$

ges av

$$u(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x) dx. \quad (3.40)$$

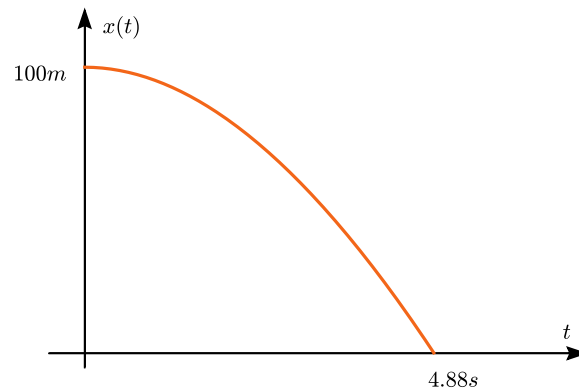
*Bevis.* Produktregeln för derivator ger att

$$\frac{d}{dx}(e^{F(x)}u(x)) = f(x)e^{F(x)}u(x) + e^{F(x)}u'(x) = e^{F(x)}g(x). \quad (3.41)$$

Satsen följer genom att bestämma primitivfunktioner och sedan multiplicera med  $e^{-F(x)}$

$$u(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x) dx. \quad (3.42)$$

□



Figur 3.3: Objektets höjd över marken som funktion av tiden.

Vi återgår nu till vårt ursprungliga problem med en fallande kropp och bestämmer lösningen med integrerande faktor.

**Exempel 3.11 (Fritt fall, integrerande faktor)** Låt den fallande kroppen ha massa  $m = 20\text{kg}$  och luftmotstånd  $k = 2\text{kg/s}$  och släppas från  $100\text{m}$  höjd. Konstanten  $g = 9.8\text{m/s}^2$  gäller approximativt nära jordytan. Ekvationen som beskriver den fallande kroppens hastighet ges av

$$\frac{dv(t)}{dt} = -9.8 - 0.1v(t), \quad v(0) = 0. \quad (3.43)$$

Den integrerande faktorn är  $e^{0.1t}$  eftersom

$$\frac{d}{dt}(e^{0.1t}v(t)) = e^{0.1t}(v'(t) + 0.1v(t)) = -9.8e^{0.1t}. \quad (3.44)$$

Vi integrerar från 0 till  $t$  och använder att  $v(0) = 0$ ,

$$v(t)e^{0.1t} = -9.8 \int_0^t e^{0.1\tau} d\tau = -9.8 [10e^{0.1\tau}]_0^t = -98(1 - e^{0.1t}). \quad (3.45)$$

Därför får vi att  $v(t) = 98(e^{-0.1t} - 1)$ . Hastigheten går alltså mot ett konstant värde  $-98$  när tiden ökar (om kroppen inte slår i marken först). Positionen som funktion av tiden ges nu av

$$x(t) = 100 + \int_0^t v(t) dt = 100 - 980(e^{-0.1t} - 1) - 98t. \quad (3.46)$$

Tiden det tar för att kroppen ska slå i marken, det vill säga lösa ekvationen  $x(t) = 0$ , kan beräknas med en numerisk metod, som till exempel fixpunktsiteration för ekvationen  $t = g(t) := \frac{100}{98} - 10(e^{-0.1t} - 1)$ . Eftersom derivatan  $|g'(t)| < 1$  kommer vi få konvergens på grund av Banachs fixpunktssats. Lösningen blir ungefär  $t^* = 4.88$  där alltså  $x(t^*) = 0$ . Figur 3.3 visar  $x(t)$  i intervallet  $t \in [0, t^*]$ . Vi ser att relationen mellan sträcka och tid blir mer och mer linjär när tiden ökar. Det innebär att hastigheten blir mer och mer konstant.



Vi ger ytterligare ett exempel på integrerande faktor.

**Exempel 3.12 (Integrerande faktor)** Bestäm lösningen till differentialekvationen  $\frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{x}u(x) = x^2$ . Vi noterar att primitivfunktionen till  $\frac{1}{x}$  är  $\ln(x)$ . Vi använder sats 3.4 för att få

$$u(x) = \frac{1}{x} \int x^3 dx = \frac{1}{x} \frac{x^4}{4} + \frac{C}{x} = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}. \quad (3.47)$$

### 3.4 Andra ordningens ODE

Andra ordningens differentialekvationer är centrala inom matematisk modellering av fysikaliska förlopp. Newtons andra lag är ett viktigt exempel på en andra ordningens ODE, andraderivatans av positionen är lika med kraften genom massan, svängande strängar är ett annat. Vi börjar igen med den allmänna formuleringen för att sedan göra förenklade antaganden som gör att lösningen kan tas fram med analytiska metoder.

**Definition 3.5 (Andra ordningens differentialekvation)** En ordinär differentialekvation av andra ordningen kan skrivas på formen

$$F\left(\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{du}{dx}, u, x\right) = 0, \quad (3.48)$$

där  $F$  är en funktion av fyra variabler  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Vi noterar att  $F$  beror på  $\frac{d^2u}{dx^2}$ ,  $\frac{du}{dx}$ ,  $u$  och  $x$ . Under vissa antaganden på  $F$  kan en andra ordningens ODE reduceras till en första ordningens ODE. Därefter kan metoder för första ordningens ODE användas.

**Sats 3.5 (Reduktion från andra till första ordningens ODE)** Två typer av andra ordningens differentialekvationer kan reduceras till första ordningen genom att introducera variabeln  $v = \frac{du}{dx}$ . Dels ekvationer på formen

$$F\left(\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{du}{dx}, x\right) = 0, \quad (3.49)$$

som reduceras till  $F\left(\frac{dv}{dx}, v, x\right) = 0$ . Givet  $v$  fås  $u(x) = \int v(x) dx$ .

Dels ekvationer på formen

$$F\left(\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{du}{dx}, u\right) = 0, \quad (3.50)$$

som reduceras till  $F\left(v \frac{dv}{du}, v, u\right) = 0$ . Givet lösningen  $v$  ges  $u(x)$  som lösning till  $\frac{du}{dx} = v(u)$ .

*Bevis.* Först studerar vi ekvation (3.49). Låt  $v = \frac{du}{dx}$ , vilket direkt ger

$$F\left(\frac{dv}{dx}, v, x\right) = 0. \quad (3.51)$$

Eftersom  $v = \frac{du}{dx}$  gäller att  $u(x) = \int v(x) dx$ .

Vi studerar nu ekvation (3.50). Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} = v \frac{dv}{du}. \quad (3.52)$$

Detta ger

$$F\left(v \frac{dv}{du}, v, u\right) = 0. \quad (3.53)$$

Denna ekvation är av första ordningen. Lösningen  $u(x)$  ges som lösning till  $\frac{du}{dx} = v(u)$  som också är en första ordningens ODE.  $\square$

**Exempel 3.13 (Reduktion till första ordningen)** Lös differentialekvationen

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \cos(x) \left(\frac{du}{dx}\right)^{1/2} \quad (3.54)$$

med begynnelsevillkoren  $u(\pi) = \frac{\pi}{8}$  och  $\frac{du}{dx}(\pi) = 0$ . Vi introducerar  $v = \frac{du}{dx}$  och ser att ekvationen är av första ordningen  $\frac{dv}{dx} = \cos(x)v^{1/2}$  och separabel:  $v^{-1/2} \frac{dv}{dx} = \cos(x)$ . Detta leder till

$$2v^{1/2} = \int \frac{dv}{v^{1/2}} = \int \cos(x) dx = \sin(x) + C. \quad (3.55)$$

Vi har,  $0 = \frac{du}{dx}(\pi) = v(\pi) = \frac{C^2}{4}$  vilket ger  $C = 0$ . Vi får

$$v(x) = \frac{\sin^2(x)}{4}, \quad (3.56)$$

vilket ger

$$u(x) = \int v(x) dx = \frac{1}{4} \int \sin^2(x) dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x)\right) + D. \quad (3.57)$$

Slutligen ger  $u(\pi) = \frac{\pi}{8}$  att  $D = 0$  och därmed  $u(x) = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{8}$ .

**Exempel 3.14 (Reduktion till första ordningen)** Hitta  $u(x)$  som löser

$$u \frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{du}{dx}\right)^2. \quad (3.58)$$

Vi låter  $v = \frac{du}{dx}$ . Vi får

$$uv \frac{dv}{du} = v^2, \quad (3.59)$$

som är separabel med lösning  $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{du}{u}$ . Detta leder till  $v(u) = Cu$ , för någon konstant  $C$ . Vi har  $\frac{du}{dx} = v = Cu$  som också är separabel med lösning  $u(x) = De^{Cx}$ , där  $D$  är ytterligare en konstant.

Notera att lösningen innehåller typiskt två integrationskonstanter som bestäms av två begynnelsevillkor. Vi har inte tagit upp existens av lösning till andra ordningens ODE. Vi väntar med det till kapitel 5

där vi visar att ODE av godtycklig ordning kan skrivas som kopplade system av första ordningens ODE. Existens och entydighet följer av en generalisering av Picards sats för system av ODE. Omskrivningen till system av första ordningens ODE ger också tillgång till en mängd numeriska metoder som vi diskuterar mer i kapitel 6.

### 3.5 Linjära ODE

En viktig klass av differentialekvationer är linjära ODE. En differentialekvation är linjär om lösningen  $u$  förekommer linjärt i ekvationen. Vi definierar en linjär ODE genom att skriva ner den på allmän form. För att underlätta lösningen skriver vi ofta ut den oberoende variabeln  $x$  endast i koefficienterna  $a_i(x)$  men inte i  $u$ . Det är då underförstått att  $u$  beror på  $x$ , se 3.60.

**Definition 3.6 (Linjär differentialekvation)** En ordinär differentialekvation av ordning  $n$  som kan skrivas på formen

$$a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u^{(1)} + a_0(x)u^{(0)} = f(x), \quad (3.60)$$

kallas linjär. Om högerledet  $f(x) = 0$  säger vi att differentialekvationen är linjär homogen.

Det är viktigt att påpeka att det alltså bara är den okända funktionen  $u$  som behöver förekomma linjärt för att differentialekvationen ska vara linjär. Funktionerna  $a_i$  kan till exempel vara olinjära i  $x$ . Om högerledet är noll  $f(x) = 0$  säger vi vidare att ekvationen är *homogen*.

För linjära homogena differentialekvationer gäller att givet två lösningar  $u_1(x)$  och  $u_2(x)$  så är linjärkombinationen  $Au_1(x) + Bu_2(x)$  också en lösning. Lösningen till en homogen ODE kallas homogenlösning.

**Sats 3.6 (Linjärkombinationer av homogenlösningar)** Om  $u_1$  och  $u_2$  är lösningar till samma linjära homogena ordinära differentialekvation så är varje linjärkombination också en lösning.

*Bevis.* Låt  $u_1$  och  $u_2$  lösa den homogena ekvationen

$$a_n(x)u_i^{(n)} + a_{n-1}(x)u_i^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u_i^{(1)} + a_0(x)u_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.61)$$

Då gäller för godtyckligt  $u = Au_1 + Bu_2$  att

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)} = A \sum_{i=0}^n a_i(x)u_1^{(i)} + B \sum_{i=0}^n a_i(x)u_2^{(i)} = 0. \quad (3.62)$$

□

Nästa sats säger att för att finna alla lösningar till en ODE räcker det att finna alla homogenlösningar och addera en enda lösning till den inhomogena ekvationen, en så kallad partikulärlösning. Att bestämma alla homogenlösningar brukar kallas att bestämma den allmänna homogenlösningen. Den allmänna lösningen (alla lösningar) till den inhomogena ekvationen ges alltså av allmänna homogenlösningar plus en enda partikulärlösning.

**Sats 3.7 (Homogenlösning plus partikulärlösning)** Vi studerar differentialekvationen

$$a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u^{(1)} + a_0(x)u^{(0)} = f. \quad (3.63)$$

Om  $u_p$  är en lösning till ekvation (3.63), en så kallad partikulärlösning, så gäller att  $u$  är en lösning om och endast om  $u = u_h + u_p$ , där  $u_h$  är en homogenlösning till ekvation (3.61).

*Bevis.* Vi sätter först in  $u = u_h + u_p$  i ekvation (3.61)

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)(u_p + u_h)^{(i)} = \sum_{i=0}^n a_i(x)u_p^{(i)} + \sum_{i=0}^n a_i(x)u_h^{(i)} = f + 0 = f. \quad (3.64)$$

Alltså är  $u = u_h + u_p$  en lösning. Å andra sidan om  $u$  löser ekvation (3.63) gäller att

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)(u - u_p)^{(i)} = \sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)} - \sum_{i=0}^n a_i(x)u_p^{(i)} = f - f = 0. \quad (3.65)$$

Alltså är  $u_h = u - u_p$  en homogenlösning.  $\square$

Man kan visa att en linjär homogen ODE av ordning  $n$  har  $n$  linjärt oberoende lösningar. Den allmänna lösningen fås som en allmän linjärkombination av dessa lösningar. Att lösningarna är linjärt oberoende innebär att en linjärkombination av lösningarna  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$  bara kan vara lika med noll om alla  $\alpha_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Definition 3.7 (Oberoende lösningar)** Lösningar  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  till en linjär  $n$ :te ordningens differentialekvation kallas linjärt oberoende om  $C_1 u_1(x) + \dots + C_n u_n(x) = 0$  för alla  $x$  medför  $C_1 = \dots = C_n = 0$ .

**Exempel 3.15 (Homogenlösning plus partikulärlösning)** Visa att ekvationen

$$u''(x) + 4u(x) = 4x^3 + 6x, \quad (3.66)$$

har homogenlösningarna  $u(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$  och partikulärlösning  $u_p(x) = x^3$ . Visa även att  $\cos(2x)$  och  $\sin(2x)$  är oberoende lösningar och bestäm  $A, B \in \mathbb{R}$  givet begynnelsevillkoren  $u(0) = 1$  och  $u'(0) = 0$ . Vi sätter först in homogenlösningen

$$u''(x) + 4u(x) = A \frac{d^2}{dx^2} \cos(2x) + B \frac{d^2}{dx^2} \sin(2x) + 4A \cos(2x) + 4B \sin(2x) = 0, \quad (3.67)$$

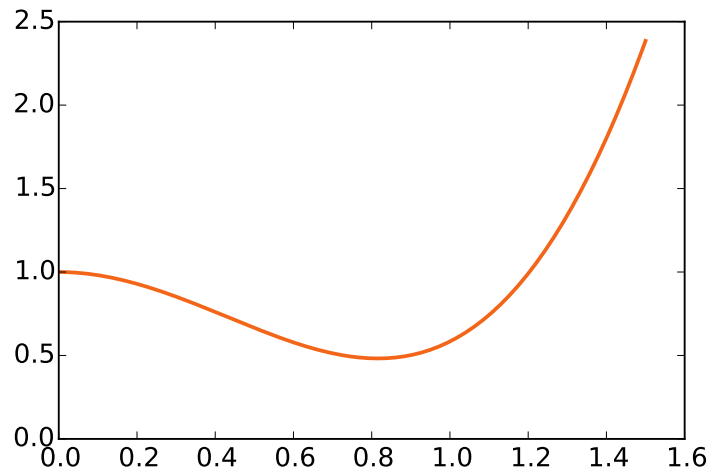
och sedan partikulärlösningen

$$u''(x) + 4u(x) = 6x + 4x^3. \quad (3.68)$$

Antag att det finns  $A, B \neq 0$  sådana att  $A \cos(2x) + B \sin(2x) = 0$  för alla  $x$ . Det innebär att  $-A/B = \tan(2x)$  för alla  $x$  vilket är en motsägelse. Slutligen använder vi att summan av homogenlösning och partikulärlösning är lösning till ekvationen och bestämmer konstanterna  $A$  och  $B$  så att begynnelsevillkoren är uppfyllda. Vi får

$$1 = u(0) = A \cos(2 \cdot 0) + B \sin(2 \cdot 0) + 0^3 = A \quad (3.69)$$

$$0 = u'(0) = -2A \sin(2 \cdot 0) + 2B \cos(2 \cdot 0) = 2B. \quad (3.70)$$



Figur 3.4: Lösningen  $u(x) = \cos(2x) + x^3$  i exempel 3.15.

Lösningen ges av  $u(x) = \cos(2x) + x^3$ , se figur (3.4).

Om  $u_1$  är en lösning till en  $n$ :te ordningens linjär ODE ger ansatsen  $u_2 = v(x)u_1$  en linjär ekvation av ordning  $n - 1$  i  $v'$ . I specialfallet  $n = 2$  kan det användas för att enkelt beräkna den andra oberoende lösningen givet den första. I det fallet blir den uppkomna ekvationen separabel. Vi ska återkomma till denna teknik flera gånger. Vi börjar med ett exempel.

**Exempel 3.16 (Oberoende lösningar)** Visa att  $u_1 = e^{-t}$  löser  $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + u = 0$  och ta fram den allmänna lösningen. Vi har att  $u_1'(x) = -e^{-t}$  och  $u_1''(t) = e^{-t}$ . Vi får

$$u_1''(t) + u_1'(t) + u_1(t) = e^{-t}(1 - 2 + 1) = 0, \quad (3.71)$$

alltså löser  $u_1$  ekvationen. Vi låter nu  $u = vu_1$ . Vi får

$$u'' + 2u' + u = u_1''v + 2u_1'v' + u_1v'' + 2u_1'v + 2u_1v' + u_1v = u_1v'', \quad (3.72)$$

där vi har använt  $u_1 = e^{-t}$  vilket innebär att  $u_1'' + 2u_1' + u_1 = 0$  och  $2u_1' + 2u_1 = 0$ . Vi får därför att  $v''(t) = 0$  och därmed  $v(t) = A + Bt$ . Den allmänna lösningen ges av  $u(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}$ .

## 3.6 Analytiska lösningar till andra ordningens ODE

Vi studerar två klasser av andra ordningens linjära homogena ODE där vi kan beräkna analytiska lösningar. Därefter ger vi exempel på inhomogena ekvationer där vi kan härleda partikulärlösningar. Vi börjar med att låta koefficienterna  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$  och  $a_2(x)$ , vara konstanta.

**Sats 3.8 (Konstanta koefficienter)** Låt  $u(t)$  vara lösningen till

$$a \frac{d^2 u}{dt^2} + b \frac{du}{dt} + cu = 0, \quad (3.73)$$

där  $a, b, c \in \mathbb{R}$  och  $a \neq 0$ . Vidare låt den karakteristiska ekvationen  $ar^2 + br + c = 0$  ha lösningar  $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ . Den allmänna lösningen ges av

$$\begin{aligned} \text{om } b^2 > 4ac & \quad u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad (\text{olika reella rötter}) \\ \text{om } b^2 = 4ac & \quad u(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt}, \quad r = r_1 = r_2 \quad (\text{reell dubbelrot}), \\ \text{om } b^2 < 4ac & \quad u(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\beta t) + Be^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad r = \alpha \pm i\beta \quad (\text{complexa rötter}), \end{aligned} \quad (3.74)$$

där  $A, B \in \mathbb{R}$  är konstanter.

*Bevis.* Vi antar lösningen  $u(t) = e^{rt}$ . Insättning i ekvation (3.73) ger den karakteristiska ekvationen  $(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$  med lösningar

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.75)$$

Om  $b^2 > 4ac$  får vi två reella rötter  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  till den karakteristiska ekvationen  $ar^2 + br + c = 0$ . Den allmänna lösningen ges då som linjärkombinationen av de två oberoende lösningarna  $e^{r_1 t}$  och  $e^{r_2 t}$  det vill säga

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}. \quad (3.76)$$

Om  $b^2 = 4ac$  får vi en dubbelrot till den karakteristiska ekvationen,  $r_1 = r_2 = r$ . Detta ger en oberoende lösning  $u_1(t) = e^{rt}$ . Den andra oberoende lösningen får vi genom att ansätta  $u = vu_1$ . Insatt i ekvation (3.73) ger det

$$0 = av''u_1 + 2av'u_1' + avu_1'' + bv'u_1 + bv'u_1' + cvu_1 \quad (3.77)$$

$$= (av'' + (2ar + b)v' + (ar^2 + br + c)v)e^{rt} \quad (3.78)$$

$$= av''e^{rt}, \quad (3.79)$$

eftersom  $ar^2 + br + c = 0$  och  $r = -\frac{b}{2a}$ . Därför gäller att  $v'' = 0$  och därmed  $v = A + Bt$ . Den allmänna lösningen ges då av  $u(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt}$ .

Slutligen om  $b^2 < 4ac$  får vi komplexkonjugerade lösningar  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  där  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  och  $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Två oberoende (komplexvärda) lösningar ges av  $\tilde{u}_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$  och  $\tilde{u}_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$ . Eftersom man kan multiplicera med konstant och addera lösningarna och fortfarande få en lösning kan vi välja två olika linjärkombinationer av  $\tilde{u}_1$  och  $\tilde{u}_2$  som ger två reella oberoende lösningar. Vi får

$$u_1(t) = \frac{\tilde{u}_1(t) + \tilde{u}_2(t)}{2} = e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad (3.80)$$

där vi använder de Moivres formel. På liknande sätt fås

$$u_2(t) = \frac{\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)}{2i} = e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} = e^{\alpha t} \sin(\beta t). \quad (3.81)$$

Den allmänna lösningen ges då av  $Ae^{\alpha t} \cos(\beta t) + Be^{\alpha t} \sin(\beta t)$ .  $\square$

**Exempel 3.17 (Andra ordningens ODE med konstanta koefficienter)** Lös den homogena differentialekvationen  $u'' + 5u' - 6u = 0$ . Den karakteristiska ekvationen ges av  $r^2 + 5r - 6 = 0$  med lösningar  $r_1 = 1$  och  $r_2 = -6$ . Den allmänna lösningen ges då av  $u(t) = Ae^t + Be^{-6t}$ .

**Exempel 3.18 (Andra ordningens ODE med konstanta koefficienter)** Lös den homogena differentialekvationen  $u'' + 4u = 0$ . Den karakteristiska ekvationen ges av  $r^2 + 4 = 0$  med lösningar  $r_1 = 2i$  och  $r_2 = -2i$ . Den allmänna lösningen ges då av  $u(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$ .

Denna lösningsteknik kan generaliseras till högre ordningens linjära ODE. Vi lämnar som övning, Problem 9, att ta fram en allmän lösning till en tredje ordningens ODE. En annan typ av andra ordningens homogen ODE vars lösning kan bestämmas analytiskt är Eulers ekvation. Istället för konstanta koefficienter låter vi  $a_2(x) = ax^2$ ,  $a_1(x) = bx$  och  $a_0(x) = c$ , där  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Sats 3.9 (Eulers ekvation)** Eulers ekvation ges av

$$ax^2 \frac{d^2u}{dx^2} + bx \frac{du}{dx} + cu = 0, \quad (3.82)$$

där  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  och  $x > 0$ . Den tillhörande karakteristiska ekvationen (som fås igenom ansatsen  $u = x^r$ ) ges av  $ar^2 + (b-a)r + c = 0$  med rötter  $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ . Den allmänna lösningen  $u(x)$  ges av

$$\begin{aligned} \text{om } (b-a)^2 > 4ac & \quad u(x) = Ax^{r_1} + Bx^{r_2}, \\ \text{om } (b-a)^2 = 4ac & \quad u(x) = Ax^r + B \ln(x)x^r, \quad r = r_1 = r_2, \\ \text{om } (b-a)^2 < 4ac & \quad u(x) = Ax^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + Bx^\alpha \sin(\beta \ln(x)), \quad r = \alpha \pm i\beta, \end{aligned} \quad (3.83)$$

där  $A, B \in \mathbb{R}$  är konstanter.

*Bevis.* Insättning ger att  $x^r$  löser ekvation (3.82) om  $ar^2 + (b-a)r + cr = 0$ . Rötterna till den karakteristiska ekvationen ges av  $r = \frac{a-b \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$ . Om  $r_1 \neq r_2$  ger detta två oberoende lösningar  $u_1(x) = x^{r_1}$ ,  $u_2(x) = x^{r_2}$ . Är  $r_1$  och  $r_2$  reella (alltså om  $(b-a)^2 > 4ac$ ) får vi därför  $u(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$ .

Om  $r_1$  och  $r_2$  är komplexkonjugerade,  $r = \alpha \pm i\beta$ , kan vi skriva

$$x^r = x^{\alpha \pm i\beta} = x^\alpha x^{\pm i\beta} = x^\alpha e^{\pm i\beta \ln(x)} = x^\alpha (\cos(\beta \ln(x)) + i \sin(\beta \ln(x))). \quad (3.84)$$

Detta ger den allmänna reellvärda lösningen  $u(x) = Ax^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + Bx^\alpha \sin(\beta \ln(x))$ .

Slutligen om  $r_1 = r_2 = r = \frac{a-b}{2a}$  får vi direkt en lösning  $u_1(x) = x^r$ . Den andra oberoende lösningen fås genom att sätta in  $u = u_1 v = x^r v$  i ekvation (3.82) och beräkna  $v(x)$ . Vi får

$$0 = ax^2 u''(x) + bx u'(x) + cu(x) \quad (3.85)$$

$$= ax^{r+2} v''(x) + (2ar + b)x^{r+1} v'(x) + (ar^2 + (b-a)r + c)x^r v(x) \quad (3.86)$$

$$= ax^{r+2} v''(x) + ax^{r+1} v'(x) \quad (3.87)$$

$$= ax^{r+1} (xv''(x) + v'(x)). \quad (3.88)$$

Eftersom  $x > 0$  måste  $xv''(x) + v'(x) = 0$ . Denna ekvation kan reduceras till en separabel första ordningens differentialekvation och har lösningen  $v(x) = A + B \ln(x)$ . Den allmänna lösningen till ekvation (3.82) ges därför av  $u(x) = Ax^r + B \ln(x)x^r$ .  $\square$

**Exempel 3.19 (Eulers ekvation)** Bestäm den allmänna lösningen till  $x^2 u''(x) + xu(x) - 2u(x) = 0$ ,  $x > 0$ . Vi låter  $u(x) = x^r$  och sätter in i ekvationen. Vi får  $0 = (r(r-1) + r - 2)x^r = (r^2 - 2)x^r$ . Eftersom  $x > 0$  är  $x^r \neq 0$  och därför måste  $r = \pm\sqrt{2}$ . Den allmänna lösningen ges av  $u(x) = C_1 x^{\sqrt{2}} + C_2 x^{-\sqrt{2}}$ .

Vi går nu vidare till partikulärlösningar. Sats 3.7 säger att den allmänna lösningen av en andra ordningens linjär ODE kan skrivas som summan av den allmänna homogenlösningen och en partikulärlösning. Detta innebär att vi endast behöver hitta en partikulärlösning som kombinerad med de allmänna homogenlösningarna ger hela lösningen. Det finns många tekniker för att hitta partikulärlösningar. En metod är att använda testlösningar. Det bygger på att göra en ansats för partikulärlösningen baserat på högerledet.

Låt  $u$  vara lösning till följande andra ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + cu = f(x). \quad (3.89)$$

Låt  $P_n$  vara godtyckligt polynom av grad  $n$ . Om  $f(x) = P_n(x)e^{kx} \cos(lx)$  eller  $f(x) = P_n(x)e^{kx} \sin(lx)$ ,  $k, l \geq 0$ , ansätter vi partikulärlösningar  $u_p(x)$  enligt följande,

$$u_p(x) = x^m e^{kx} Q_n(x) \cos(lx) + x^m e^{kx} R_n(x) \sin(lx), \quad (3.90)$$

där  $m = 0, 1, 2$  är det minsta tal sådant att ingen term i polynomet är homogenlösning till ekvationen och  $Q_n$  och  $R_n$  är polynom av grad  $n$ . Notera att både  $l$  och  $k$  kan väljas lika med 0. Vi avslutar med två exempel.

**Exempel 3.20 (Partikulärlösning)** Bestäm en partikulärlösning till

$$u''(x) + 2u'(x) - 2u(x) = x^2. \quad (3.91)$$

Vi ansätter  $u_p(x) = Ax^2 + Bx + C$ . Vi får  $2A + 4Ax + 2B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2$ . När vi separerar termer av olika grad får vi

$$x^2 : \quad -2A = 1, \quad (3.92)$$

$$x : \quad 4A - 2B = 0, \quad (3.93)$$

$$1 : \quad 2A + 2B - 2C = 0. \quad (3.94)$$

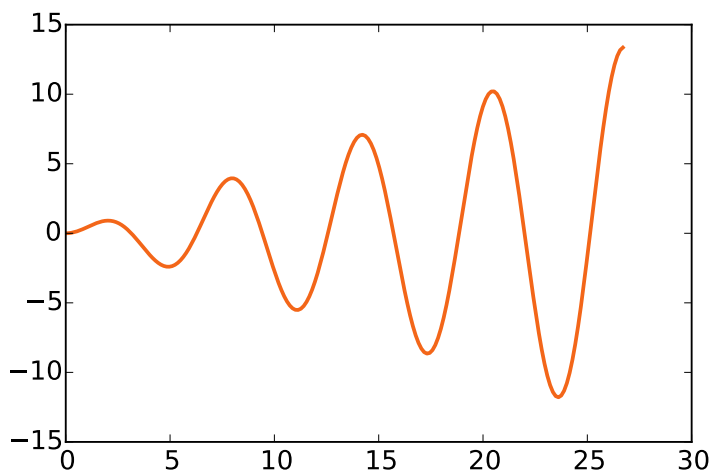
Vi drar slutsatsen att  $A = -\frac{1}{2}$ ,  $B = 2A = -1$  och  $C = -\frac{3}{2}$ . En partikulärlösning ges alltså av  $u_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ .

**Exempel 3.21 (Partikulärlösning)** Bestäm en partikulärlösning till

$$u''(x) + u(x) = \cos(x). \quad (3.95)$$

Vi noterar att  $\sin(x)$  och  $\cos(x)$  är homogenlösningar till ekvationen. Eftersom högerledet är en homogenlösning måste vi enligt tekniken ovan ansätta  $u_p(x) = Ax \cos(x) + Bx \sin(x)$  där  $A, B \in \mathbb{R}$ . Hade vi ansatt  $A \sin(x) + B \cos(x)$  hade vi bara fått homogenlösningar. Denna speciella situation kallas för resonans och leder till svängningar som ökar i magnitud då  $x$  ökar. Vi får





Figur 3.5: Funktionen  $\frac{x \sin(x)}{2}$  är partikulärlösning till ekvationen  $u''(x) + u(x) = \cos(x)$ .

att

$$u''(x) + u(x) = \frac{d}{dx}(A \cos(x) - Ax \sin(x) + B \sin(x) + Bx \cos(x)) \quad (3.96)$$

$$+ Ax \cos(x) + Bx \sin(x)$$

$$= -A \sin(x) - A \sin(x) - Ax \cos(x) + B \cos(x) + B \cos(x) - Bx \sin(x) \quad (3.97)$$

$$+ Ax \cos(x) + Bx \sin(x)$$

$$= 2B \cos(x) - 2A \sin(x). \quad (3.98)$$

Därför måste  $A = 0$  och  $B = \frac{1}{2}$ . Partikulärlösningen ges av  $u_p(x) = \frac{1}{2}x \sin(x)$ . I figur 3.5 ser vi hur svängningarna ökar i magnitud då  $x$  ökar på grund av resonanseffekten.

I nästa kapitel introducerar vi en teknik för att lösa ODE med konstanta koefficienter som kallas Laplacetransform. Speciellt ger den metoden ett mer generellt verktyg för att lösa inhomogena ekvationer.

## Övningar

### 3.1 Introduktion till differentialekvationer

**Övning 3.1** Avgör differentialekvationens ordning och om den är partiell eller ordinär.

(a)  $\frac{dy}{dx} = y^2$  (b)  $\frac{\partial z}{\partial x} + k \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  (c)  $x^{(4)}(t) - tx''(t) = 1$  (d)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^3 u}{2}$

**Övning 3.2** Avgör differentialekvationens ordning och om den är partiell eller ordinär.

(a)  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$  (b)  $\sin(x(t)) \frac{d^4 x(t)}{dt^4} = x(t) \cos(t)$  (c)  $m\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$   
 (d)  $-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x, y)$

**Övning 3.3** Avgör om funktionen är en lösning till  $u'' + u = 0$ .

(a)  $\cos(x)$  (b)  $\sin(3x)$  (c)  $2 \cos(x) + 3 \sin(x)$  (d)  $\sin(x - 1)$

**Övning 3.4** Avgör om  $u = f(x)$  löser differentialekvationen.

(a)  $u' = u^2, f(x) = \frac{1}{C-x}$  (b)  $u = 2/u', f(x) = \sqrt{x}$  (c)  $\frac{\sin(2x)}{u'} = 2u, f(x) = \sin(x)$   
 (d)  $2uu' = u'', f(x) = k \tan(kx)$

**Övning 3.5** Gissa en funktion som löser differentialekvationen.

(a)  $u' = 3$  (b)  $u' = u$  (c)  $u'' - k^2 u = 0$  (d)  $u^2 + u' = 2u - 1$

### 3.2 Picards sats

**Övning 3.6** Visa att problemet har entydig lösning, alternativt bestäm två olika lösningar.

(a)  $u' = u, u(0) = 1$  (b)  $u' = ku, u(0) = 2$  (c)  $u' = 4u^{3/4}, u(0) = 0$  (d)  $u' = 1 - u^2, u(0) = 2$

**Övning 3.7** Lös differentialekvationen med fixpunktsiteration genom att använda begynnelsevärdet som startgissning.

(a)  $u' = 2u, u(0) = 1$  (b)  $u' = -xu, u(0) = 1$  (c)  $u' = u - x, u(0) = 2$  (d)  $u' = 2x(1 + u), u(0) = 0$

### 3.3 Analytiska tekniker för första ordningens ODE

**Övning 3.8** Lös differentialekvationen.

(a)  $\frac{du}{dx} = \frac{3x}{u}$  (b)  $\frac{du}{dx} = x^2 u$  (c)  $\frac{du}{dx} + xu = u$  (d)  $\frac{du}{dx} - \frac{\sin(x)}{u} = \frac{x}{u}$

**Övning 3.9** Lös differentialekvationen.

(a)  $\frac{du}{dx} = e^u \cos(x)$  (b)  $\frac{du}{dx} = u^2$  (c)  $\frac{dx}{du} = 4 - x^2$  (d)  $v \frac{dv}{ds} = g$

**Övning 3.10** Lös differentialekvationen.

(a)  $\frac{du}{dx} = \frac{u^2+xu}{x^2}$  (b)  $\frac{du}{dx} = \frac{x^2-xu}{xu-u^2}$  (c)  $\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} + e^{\frac{u}{x}}$  (d)  $x\frac{du}{dx} = \sqrt{xu} + u$

**Övning 3.11** Lös begynnelsevärdesproblemet.

(a)  $\frac{du}{dx} - x^2 = x^2u, u(0) = 2$  (b)  $u' = \frac{u}{x} + \frac{1}{\cos\left(\frac{u}{2x}\right)}, u(1) = 2$  (c)  $xu' = \frac{1}{1+3u^2}, u(1) = 2$   
 (d)  $\frac{du}{dx} = e^{-xu} - \frac{u}{x}, u(2) = 0$

**Övning 3.12** Lös differentialekvationen.

(a)  $\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = x$  (b)  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{u}{x}$  (c)  $x\frac{du}{dx} = x^2 - 3u$  (d)  $\frac{du}{dx} + 2u = -2xu + e^{-x^2}$

### 3.4 Andra ordningens ordinära differentialekvationer

**Övning 3.13** Visa att  $u = f(x)$  löser differentialekvationen.

(a)  $u'' + 2u' = 3u, f = e^{-3x}$  (b)  $\frac{1}{4}u'' + u = 0, f = \cos(2x)$  (c)  $x^3u'' + 2xu' = 2u, f = Cx$  (d)  $x^2u'' + 2u = 2xu', f = x^2$

**Övning 3.14** Lös differentialekvationen.

(a)  $u''x = u'$  (b)  $u'' = (u')^2/u$  (c)  $u'' = 2u'u$  (d)  $u'' + u' = x$

**Övning 3.15** Lös begynnelsevärdesproblemet.

(a)  $u'' = x(u')^3, u'(0) = 1, u(0) = 0$  (b)  $u'' + 2\sin(x)\sqrt{u'} = 0, u'(0) = 1, u(0) = 1$   
 (c)  $u'' + 2x(u')^2 = 0, u'(0) = 1/4, u(0) = 0$  (d)  $u'' + (u')\tan(x) = 0, u'(0) = 2, u(0) = 0$

**Övning 3.16** Lös begynnelsevärdesproblemet.

(a)  $u'' = \frac{\sin(x)\cos(x)}{u'}, u'(0) = 0, u(0) = 0$  (b)  $u'' = 3x^2e^{-u'}, u'(1) = 0, u(1) = -3$   
 (c)  $\sqrt{2x}u'' = e^{\sqrt{2x}-u'}, u'(0) = 0, u(0) = 0$  (d)  $u'' + 2x(u')^2 = 0, u'(0) = -1, u(0) = 1$

### 3.5 Linjära ordinära differentialekvationer

**Övning 3.17** Visa att  $u_h$  är homogenlösning och  $u_p$  partikulärlösning och bestäm  $A$  och  $B$  givet begynnelsevillkoren

(a)  $u'' + 9u = 9x^2 + 2, u_h(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x), u_p = x^2, u(0) = 0, u'(0) = 1$   
 (b)  $u'' + 5u' + 6u = 6x + 5, u_h(x) = Ae^{-3x} + Be^{-2x}, u_p = x, u(0) = 0, u'(0) = 0$   
 (c)  $x^2u'' - 4xu' + 6u = \frac{12}{x}, u_h(x) = Ax^2 + Bx^3, u_p = x^{-1}, u(1) = 0, u'(-1) = 1$   
 (d)  $x^2u'' + 3xu' + u = 4x, u_h(x) = \frac{A\ln(x)}{x} + \frac{B}{x}, u_p = x, u(1) = 5, u'(1) = 1$

**Övning 3.18** Visa att  $u = f(x)$  är en lösning och bestäm den generella lösningen.

(a)  $u'' - 2u' + u = 0, f(x) = e^x$  (a)  $u'' - 3u' + 2u = 0, f(x) = e^x$   
 (c)  $u'' - 4u' + 3u = 0, f(x) = e^{3x}$  (d)  $u'' + 5u' + 6u = 0, f(x) = e^{-2x}$

**Övning 3.19** Visa att  $u = f(x)$  är en lösning och bestäm den generella lösningen.

- (a)  $x^2u'' + 3xu' - 3u = 0, f(x) = x$  (b)  $u'' + u' - \frac{3}{4}u = 0, f(x) = e^{x/2}$   
 (c)  $u'' + u = 0, f(x) = \cos(x)$  (d)  $x^2u'' + 3xu' + u = 0, f(x) = \frac{1}{x}$

**Övning 3.20** Visa att  $u = f(x)$  är en lösning och bestäm den generella lösningen.

- (a)  $x^2u'' + (x^2 - 2x)u' + (2 - x)u = 0, f(x) = x$  (b)  $x^2u'' - 4xu' + 6u = 0, f(x) = x^2$   
 (c)  $x^2u'' - 2xu' + 2u = 0, f(x) = x^2$  (d)  $u'' + 4u = 0, f(x) = \sin(2x)$

### 3.6 Analytiska lösningar

**Övning 3.21** Bestäm den allmänna lösningen.

- (a)  $u'' + 2u' - 3u = 0$  (b)  $u'' + 4u' + 4u = 0$  (c)  $u'' + 8u' + 7u = 0$  (d)  $u'' + 2u' + u = 0$

**Övning 3.22** Bestäm den allmänna lösningen.

- (a)  $u'' - 2u' + 5u = 0$  (b)  $u'' + 4u' + 8u = 0$  (c)  $u'' + 8u' = 0$  (d)  $u'' - 2u' + 10u = 0$

**Övning 3.23** Bestäm den allmänna lösningen.

- (a)  $2x^2u'' + 10xu' + 6u = 0$  (b)  $x^2u'' + 3xu' + 5u = 0$  (c)  $2x^2u'' + 6xu' + 2u = 0$   
 (d)  $x^2u'' - 3xu' - 5u = 0$

**Övning 3.24** Bestäm partikulärlösningen.

- (a)  $u'' + 2u' + u = e^x$  (b)  $u'' - 3u' + 2u = e^{2x}$  (c)  $u'' - 3u' + 2u = \sin(x)$   
 (d)  $u'' + 4u' + 2u = x$

**Övning 3.25** Bestäm partikulärlösningen.

- (a)  $3u'' - u' + u = 2x^2$  (b)  $u'' + 9u = \cos(3x)$  (c)  $u'' + u = xe^{2x}$  (d)  $u'' - 2u' + u = xe^x$

## Problem

### 3.1 Existens och entydighet

**Problem 3.1** Avgör om begynnelsevärdesproblemet  $u' = \sqrt{u-1}, u(1) = 1$ , har entydig lösning.

**Problem 3.2** Låt  $\|f\|_{L^p([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$  med  $1 \leq p < \infty$  för en kontinuerlig funktion  $f$  på intervallet  $[a, b]$  definiera en norm. Visa att  $\|f\|_p \leq (b-a)^{1/p} \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ .

### 3.2 Första ordningens ODE

**Problem 3.3** Exponentialfunktionen kan definieras som lösning till ekvationen  $u'(x) = u(x)$  med begynnelsevillkor  $u(0) = 1$ . Visa att ekvationen har entydig lösning och visa att produkten av lösningar  $v = u^2$  uppfyller ekvationen  $v'(x) = 2v(x)$ ,  $v(0) = 1$  genom att använda denna definition.

**Problem 3.4** Lös integralekvationen  $u(x) = 1 + \int_2^x u^2(x) dx$ .

### 3.3 Andra ordningens ODE

**Problem 3.5** Bestäm lösningen till  $y''(x) = (y'(x))^2$  med begynnelsevillkor  $y(0) = 0$  och  $y'(0) = 1$ .

**Problem 3.6** Visa att  $x^r \ln(x)$  är en lösning till en Euler-ekvation vars karakteristiska ekvation har dubbelrot  $r_1 = r_2 = r$ .

### 3.4 Linjära ODE

**Problem 3.7** Bestäm en lösning  $u(t)$  till  $u^{(4)}(t) + u(t) = 0$ ,  $t > 0$ , sådan att  $u$  går mot noll då  $t \rightarrow \infty$ . Ansätt  $e^{rt}$  och ta först fram fyra oberoende lösningar.

**Problem 3.8** Ta fram den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen  $u'''(t) + 2u''(t) - u'(t) + 2u(t) = 0$ .

### 3.5 Partikulärlösningar

**Problem 3.9** Bestäm en partikulärlösning till  $x^2 u''(x) + x u'(x) + u(x) = x^2$ .

**Problem 3.10** Visa att  $u(x, t) = u(x - ct)$ , där  $c \in \mathbb{R}$  är en konstant och  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deriverbar, löser ekvationen  $\frac{du(x,t)}{dt} + c \frac{du(x,t)}{dx} = 0$ .

## 4. Laplacetransform

4.1	Definition av Laplacetransform	72
4.2	Skalning	75
4.3	Laplacetransform av derivator och integraler	76
4.4	Fältning	79
4.5	Impulser och diskontinuerliga funktioner	80
4.6	Lösning av begynnelsevärdesproblem	83

*Laplacetransform är en analytisk metod för att lösa tidsberoende ordinära differentialekvationer och integralekvationer. Till skillnad från andra analytiska tekniker vi studerat kan Laplacetransformen hantera diskontinuerliga data och impulser, som är vanligt förekommande i tillämpningar inom elektriska nät och mekaniska system. Laplacetransformen transformerar differentialekvationen till en algebraisk ekvation, i en ny variabel, som är enklare att lösa. Sedan transformeras lösningen tillbaka till tidsdomänen.*

### 4.1 Definition av Laplacetransform

Laplacetransformen är en integraltransform med vilken ett givet problem transformeras från tidsvariabeln  $t$  till en ny variabel  $s$ . Poängen är att integral- och differentialekvationer är enklare att lösa på transformsidan eftersom de transformeras till algebraiska ekvationer. När lösningen är bestämd kan man sedan gå tillbaka till tidsdomänen med hjälp av tabeller eller invers Laplacetransform.

För att ge en motivering till hur och varför Laplacetransform fungerar börjar vi med ett exempel.

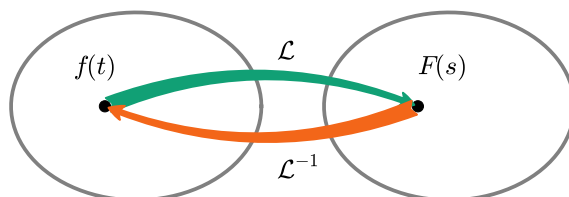
**Exempel 4.1 (Motiverande exempel)** Vi vill lösa begynnelsevärdesproblemet

$$u'(t) + u(t) = e^{-2t}, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

med begynnelsevillkoret  $u(0) = 0$ . Vi har tidigare använt integrerande faktor för att lösa denna ekvation. Nu vill vi istället introducera en ny metod. Vi multiplicerar ekvationen med en funktion  $e^{-st}$ , där  $s > 0$ , och integrerar från 0 till  $\infty$ . Vi antar tillsvidare att integralerna är väldefinierade, vilket kräver att  $\lim_{t \rightarrow \infty} (|u'(t)| + |u(t)|)e^{-st} = 0$ . Vi får

$$\int_0^{\infty} u'(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st} dt. \quad (4.2)$$

Vi integrerar den första termen partiellt och använder att den övre gränsen blir noll på grund av att



Figur 4.1: Laplacetransformen  $\mathcal{L}$  transformerar funktioner uttryckta i  $t$  till en ny variabel  $s$ . Den inversa Laplacetransformen  $\mathcal{L}^{-1}$  transformerar tillbaka till  $t$ .

$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)|e^{-st} = 0$  och den undre gränsen blir noll eftersom  $u(0) = 0$ . Detta ger ekvationen

$$s \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+2)t} dt = \left[ \frac{-1}{s+2} e^{-(s+2)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+2}. \quad (4.3)$$

Vi inför beteckningen  $U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt$  och ser att vi får en algebraisk ekvation som bestämmer  $U(s)$

$$(s+1)U(s) = \frac{1}{s+2}. \quad (4.4)$$

Med hjälp av partialbråksuppdelning får vi

$$U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, \quad (4.5)$$

eftersom vi får att  $A+B=0$  och  $2A+B=1$  med lösning  $A=1$  och  $B=-1$  när vi gör liknämning. Frågan är nu om vi kan hitta en funktion  $u(t)$  sådan att

$$\int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \quad (4.6)$$

Vi vet redan att  $\int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st} dt = \frac{1}{s+2}$ . På samma sätt fås  $\int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st} dt = \frac{1}{s+1}$ . Därför har vi också att

$$\int_0^{\infty} (e^{-t} - e^{-2t})e^{-st} dt = \left[ \frac{-1}{s+1} e^{-(s+1)t} - \frac{-1}{s+2} e^{-(s+2)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \quad (4.7)$$

Vi noterar här att så länge  $s > 0$  så konvergerar alla integraler eftersom  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ . Vi identifierar lösningen som  $u(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ .

I exemplet ser vi att vi transformerar en differentialekvation i variabeln  $t$  till en algebraisk ekvation i variabeln  $s$ . Vi löser sedan den algebraiska ekvationen och transformerar tillbaka till  $t$ .

Efter denna motivering är vi redo att definiera Laplacetransformen. Variabeln  $s$  kommer i definitionen

tillåtas vara komplex. Laplacetransformen av en funktion  $f(t)$  är en generaliserad integral med avseende på tiden  $t$  från 0 till  $\infty$  av funktionen viktad med  $e^{-st}$  där  $s \in \mathbb{C}$ .

**Definition 4.1 (Laplacetransform)** Låt  $f(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  vara begränsad av  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  för några konstanter  $C$  och  $a$ . Laplacetransformen av  $f(t)$  ges av

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(s) > a. \quad (4.8)$$

Vi använder två olika notationer för Laplacetransformen av en funktion  $f(t)$ . Dels  $F(s)$  som ovan och dels  $\mathcal{L}(f(t))(s)$ . Den första är kortare och att föredra om man jobbar med funktioner  $f(t)$  och  $g(t)$ . Den senare är att föredra om man har explicita uttryck  $t^2$ ,  $\sin(t)$  som till exempel i tabeller eller som data i ekvationer.

Laplacetransformen är definierad under förutsättning att integralen är konvergent. I följande sats visar vi varför villkoret  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  leder till en väldefinierad Laplacetransform för  $\operatorname{Re}(s) > a$ .

**Sats 4.1 (Väldefinierad Laplacetransform)** Låt  $f(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  vara begränsad av  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  för några konstanter  $C, a \geq 0$ . Laplacetransformen av  $f(t)$  är väldefinierad för  $s$  sådana att  $\operatorname{Re}(s) > a$ .

*Bevis.* Låt  $s = x + iy$  där  $x, y$  är reella och  $x > a$ . Vi får

$$|F(s)| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{-xt}| |e^{-iyt}| |f(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{-xt}| |f(t)| dt, \quad (4.9)$$

där vi använder att  $|e^{iy}| = |\cos(y) + i \sin(y)| = \sqrt{\cos^2(y) + \sin^2(y)} = 1$ . Vi får vidare att

$$|F(s)| \leq C \int_0^{\infty} e^{(a-x)t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} C \left[ \frac{e^{(a-x)t}}{a-x} \right]_0^R = \frac{C}{x-a} < \infty, \quad (4.10)$$

eftersom  $x > a$ . □

I exempel 4.1 gäller att Laplacetransformerna är väldefinierade eftersom vi kan välja  $C = 1$  och  $a = 0$ . Under förutsättning att  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  och  $\operatorname{Re}(s) > a$  kommer bidraget från den övre gränsen i den generaliserade integralen försvinna vid evaluering av primitivfunktionen.

**Exempel 4.2 (Exponentialfunktionens Laplacetransform)** Låt  $f(t) = e^t$ . Därmed uppfyller  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  med  $C = a = 1$ . Vi låter  $\operatorname{Re}(s) > 1$  och får

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^t dt = \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} dt = \left[ \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-1}. \quad (4.11)$$

Eftersom vi har  $s = x + iy$  med  $x > 1$  så gäller att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{(1-s)t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-iyt}| |e^{(1-x)t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(1-x)t} = 0. \quad (4.12)$$



**Exempel 4.3 (Laplacetransformen av en konstant)** Låt  $f(t) = 1$ . Därmed uppfyller  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  med  $C = 1$  och  $a = 0$ . För  $\operatorname{Re}(s) > 0$  får vi

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ \frac{1}{-s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}. \quad (4.13)$$

Den övre integrationsgränsen ger inget bidrag eftersom för  $s = x + iy$  med  $x > 0$  gäller att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-st}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-xt}| |e^{-iyt}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-xt} = 0. \quad (4.14)$$

Laplacetransformen är en linjär operator vilket innebär att givet två tal  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  och två funktioner  $f(t)$  och  $g(t)$ , sådana att Laplacetransformen är väldefinierad, gäller

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \quad (4.15)$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \quad (4.16)$$

$$= \alpha \mathcal{L}(f(t))(s) + \beta \mathcal{L}(g(t))(s). \quad (4.17)$$

Detta följer alltså direkt av integralens egenskaper.

Det finns även en invers Laplacetransform definierad på följande vis.

**Definition 4.2 (Invers Laplacetransform)** Givet  $F(s)$  definierad för  $\operatorname{Re}(s) = a$  gäller att

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(a + i\omega) e^{(a+i\omega)t} d\omega. \quad (4.18)$$

För att använda den inversa formeln krävs ofta djupare kunskaper om integration i det komplexa talplanet än vad som ingår i denna framställning. Därför nöjer vi oss med att konstatera att en invers finns. Det går även att visa att Laplacetransformen är entydig upp till variationer i enskilda punkter, det vill säga om två funktioner har samma Laplacetransform så är de lika utom möjligen i ett ändligt antal punkter. På grund av entydigheten kan vi använda Laplacetransformen för att beräkna tabeller och sedan hitta den inversa transformen som Laplacetransformen till ett känt uttryck. Detta tillvägagångssätt är analogt med att bestämma primitivfunktioner genom att studera tabeller av derivator.

## 4.2 Skalning

Det finns ett antal tekniker som förenklar bestämning av Laplacetransformer. Vi introducerar först en teknik som kallas skalning.

**Sats 4.2 (Skalning)** Låt  $f(t)$  vara en given funktion med Laplacetransform  $F(s)$  och  $\alpha > 0$  vara ett givet tal. Vi bildar  $g(t) = f(\alpha t)$ . Då gäller att Laplacetransformen  $G(s)$  av  $g(t)$  ges av  $G(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ .

*Bevis.* Vi har

$$G(s) = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-st} dt = \left\{ \tau = \alpha t, \frac{d\tau}{dt} = \alpha \right\} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right). \quad (4.19)$$

□

**Exempel 4.4 (Skalning)** Låt  $g(t) = e^{3t}$ . Vi vet att Laplacetransformen av  $f(t) = e^t$  ges av  $F(s) = \frac{1}{s-1}$ . Sats 4.2 ger därför att  $G(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{s}{3}-1} = \frac{1}{s-3}$ .

Här skalas alltså tidsvariabeln om mellan  $f(t)$  och  $g(t)$ . Nästa teknik kallas exponentiell skalning.

**Sats 4.3 (Exponentiell skalning)** Låt  $f(t)$  vara en given funktion med Laplacetransform  $F(s)$  och  $\alpha > 0$  vara ett givet tal. Vi bildar  $g(t) = e^{\alpha t} f(t)$ . Då gäller att Laplacetransformen  $G(s)$  av  $g(t)$  ges av  $G(s) = F(s - \alpha)$ .

*Bevis.* Vi har

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt = F(s - \alpha). \quad (4.20)$$

□

**Exempel 4.5 (Exponentiell skalning)** Låt  $g(t) = e^{\alpha t}$ . Vi använder nu istället exponentiell skalning. Vi har  $g(t) = e^{\alpha t} f(t)$ , där  $f(t) = 1$  med Laplacetransform  $F(s) = \frac{1}{s}$ . Vi får genom att använda exponentiell skalning  $G(s) = F(s - \alpha) = \frac{1}{s-\alpha}$ .

Kan vi Laplacetransformera  $f(t)$  går alltså  $e^{\alpha t} f(t)$  enkelt att transformera. Det finns andra tekniker också men vi nöjer oss för tillfället för att gå vidare till Laplacetransform av derivata och integral som är en huvudpoäng med Laplacetransform.

## 4.3 Laplacetransform av derivator och integraler

Laplacetransformen används för att lösa differential- och integralekvationer. Anledningen till att den lämpar sig för dessa problem är att Laplacetransformen av både derivator och integraler är enkel att räkna ut om man känner Laplacetransformen av integranden eller funktionen som ska deriveras.

**Sats 4.4 (Laplacetransform av derivata)** Låt  $f(t)$  vara en deriverbar funktion sådan att  $|f(t)| \leq Ce^{at}$ . Låt vidare Laplacetransformen av  $f(t)$  vara  $F(s)$ . Då gäller att  $\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0)$ .

*Bevis.* Vi använder partiell integration

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s), \quad (4.21)$$

om  $\operatorname{Re}(s) > a$  eftersom med  $s = x + iy$  gäller att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-(x+iy)t} f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-xt}| |e^{-iyt}| |f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} C e^{(a-x)t} = 0, \quad (4.22)$$

då  $x = \operatorname{Re}(s) > a$ . □

**Exempel 4.6 (Laplacetransform av högre ordningens derivata)** Genom att upprepa formeln för Laplacetransform av derivatan kan vi härleda en formel för högre ordningens derivata. Givet att  $f(t)$  är två gånger kontinuerligt deriverbar gäller

$$\mathcal{L}(f''(t))(s) = s\mathcal{L}(f'(t))(s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f(t))(s) - sf(0) - f'(0). \quad (4.23)$$

För tredjederivatans gäller

$$\mathcal{L}(f'''(t))(s) = s\mathcal{L}(f''(t))(s) - f''(0) = s^3\mathcal{L}(f(t))(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \quad (4.24)$$

Den allmänna formeln ges av följande sats.

**Sats 4.5 (Laplacetransform av högre ordningens derivata)** Låt  $f(t)$  vara  $n$  gånger kontinuerligt deriverbar. Låt vidare Laplacetransformen av  $f(t)$  vara  $F(s)$ . Då gäller att  $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$ .

*Bevis.* Formeln för Laplacetransform av derivata ger att satsen gäller för  $n = 1$ . Vi antar nu att den gäller för  $n - 1$  alltså  $\mathcal{L}(f^{(n-1)}(t))(s) = s^{n-1}F(s) - \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i-1)}(0)$  och visar att relationen gäller för  $n$ . Vi låter vidare  $g(t) = f^{(n-1)}(t)$ . Vi får  $G(s) = s^{n-1}F(s) - \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i-1)}(0)$  och  $g(0) = f^{(n-1)}(0)$  så

$$\mathcal{L}(f^n(t))(s) = \mathcal{L}(g'(t))(s) \quad (4.25)$$

$$= sG(s) - g(0) \quad (4.26)$$

$$= s \cdot s^{n-1}F(s) - s \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i-1)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (4.27)$$

$$= s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0). \quad (4.28)$$

Satsen följer nu genom induktion. □

Derivering motsvarar alltså multiplikation med  $s$  på transformsidan. För integralen, som är derivatans invers, gäller att Laplacetransformen istället motsvarar division med  $s$ .

**Sats 4.6 (Laplacetransform av integral)** Låt  $f(t)$  vara en integrerbar funktion sådan att  $|f(t)| \leq Ce^{at}$ . Låt vidare Laplacetransformen av  $f(t)$  vara  $F(s)$ . Vi bildar  $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  och antar vidare att  $|g(t)| \leq Ce^{at}$ . Då gäller att  $\mathcal{L}(g(t))(s) = \frac{1}{s}F(s)$  under förutsättning att  $\operatorname{Re}(s) > a$ .

*Bevis.* Vi använder partiell integration för att få

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau dt = \left[ \frac{-1}{s} e^{-st} g(t) \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} g'(t) dt = \frac{1}{s} F(s), \quad (4.29)$$

eftersom  $g(0) = 0$  och gränsvärdet i  $\infty$  också blir 0. Detta ses genom att använda att  $\operatorname{Re}(s) > a$ , låta  $s = x + iy$  och studera

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-(x+iy)t} g(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-xt}| |e^{-iyt}| |g(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} C e^{(a-x)t} = 0, \quad (4.30)$$

då  $x = \operatorname{Re}(s) > a$ . □

**Exempel 4.7 (Laplacetransform av integral)** Låt  $f(t) = 1$ , med Laplacetransform  $\frac{1}{s}$ , och  $g(t) = \int_0^t 1 d\tau = t$ . Då ges Laplacetransformen av  $t$  av

$$\mathcal{L}(t)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 d\tau\right)(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (4.31)$$

På samma sätt gäller att

$$\mathcal{L}(t^2)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 2\tau d\tau\right)(s) = \frac{2}{s^3}, \quad (4.32)$$

och genom upprepning

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (4.33)$$

Derivering på transformsidan motsvaras i sin tur av multiplikation med  $-t$  i tidsdomänen.

**Sats 4.7 (Multiplikation med  $t$ )** Låt  $f(t)$  vara en given funktion med Laplacetransform  $F(s)$ . Då gäller att  $g(t) = tf(t)$  har Laplacetransform  $G(s) = -F'(s)$ .

*Bevis.* Vi har

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = - \int_0^\infty t e^{-st} f(t) dt = -G(s). \quad (4.34)$$

□

**Exempel 4.8 (Laplacetransform med hjälp av derivata)** Vi bestämmer Laplacetransformen av  $t^k e^{-t}$ . Genom att använda sats 4.7 får vi att

$$\mathcal{L}(te^{-t})(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}. \quad (4.35)$$

På samma sätt gäller

$$\mathcal{L}(t^2 e^{-t})(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{2}{(s+1)^3}, \quad (4.36)$$

och i allmänhet

$$\mathcal{L}(t^k e^{-t})(s) = \frac{k!}{(s+1)^{k+1}}. \quad (4.37)$$

## 4.4 Faltning

Man skulle kunna tro att Laplacetransformen av produkten av två funktioner är lika med produkten av Laplacetransformerna men så enkelt är det inte. Istället gäller att Laplacetransformen av en speciell integral, faltningsintegralen, mellan två funktioner är lika med produkten av Laplacetransformerna. När man löser ordinära differentialekvationer med Laplacetransform är det viktigt att kunna transformera tillbaka produkter av kända Laplacetransformer. Därför är faltning ett viktigt begrepp i detta kapitel.

**Definition 4.3 (Faltning)** Faltningen av två funktioner,  $f(t)$  och  $g(t)$ , ges av  $(f * g)(t) := \int_0^t f(t-u)g(u) du$ .

Faltningen mellan två funktioner är kommutativ vilket innebär att,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du = \{\bar{t} = t - u\} = - \int_t^0 f(t-\bar{t})g(\bar{t}) d\bar{t} = (g * f)(t). \quad (4.38)$$

**Sats 4.8 (Laplacetransform av faltning)** För två kontinuerliga funktioner  $f(t)$  och  $g(t)$  som uppfyller  $|f(t)| + |g(t)| \leq Ce^{at}$  gäller,

$$\mathcal{L}((f * g)(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s). \quad (4.39)$$

*Bevis.* Vi låter  $h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$  och betecknar dess Laplacetransform  $H(s)$ . Vi får då att

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st}h(t) dt \quad (4.40)$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u)g(t-u) du dt \quad (4.41)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u) du dt = \{\text{vi byter integrationsordning}\} \quad (4.42)$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u) dt du = \{\bar{t} = t - u\} \quad (4.43)$$

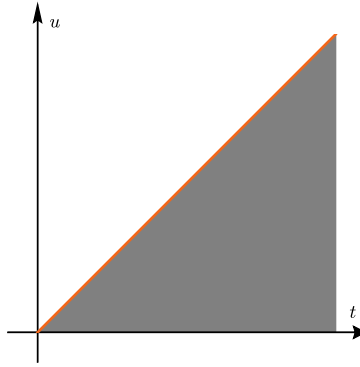
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+\bar{t})} f(u)g(\bar{t}) d\bar{t} du \quad (4.44)$$

$$= \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \int_0^\infty e^{-s\bar{t}} g(\bar{t}) d\bar{t} \quad (4.45)$$

$$= \mathcal{L}(f(t))(s)\mathcal{L}(g(t))(s). \quad (4.46)$$

I figur 4.2 ser vi integrationsområdet i  $tu$ -planet. När vi byter ordning på integralerna kommer gränserna istället gå från 0 till  $\infty$  i  $u$  och från  $u$  till  $\infty$  i  $t$ .  $\square$

**Exempel 4.9 (Faltning)** Bestäm den inversa Laplacetransformen till  $H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$ . Vi vet sedan tidigare att  $\mathcal{L}(t) = s^{-2}$  och  $\mathcal{L}(e^{-t}) = (s+1)^{-1}$  så  $H(s) = F(s)G(s)$  med  $f(t) = t$  och



Figur 4.2: Byte av integrationsordning.

$g(t) = e^{-t}$ . Vi använder sats 4.8 och får

$$h(t) = (f * g)(t) \quad (4.47)$$

$$= \int_0^t (t-u)e^{-u} du \quad (4.48)$$

$$= t \int_0^t e^{-u} du - \int_0^t ue^{-u} du \quad (4.49)$$

$$= t(1 - e^{-t}) + [ue^{-u}]_0^t - \int_0^t e^{-u} du \quad (4.50)$$

$$= t(1 - e^{-t}) + te^{-t} - (1 - e^{-t}) = e^{-t} + t - 1. \quad (4.51)$$

## 4.5 Impulser och diskontinuerliga funktioner

I tillämpningar är det viktigt att kunna hantera diskontinuerliga funktioner och impulser som t.ex. uppkommer när en elektrisk krets slås på. För att uttrycka denna typ av fenomen matematiskt återkommer vi till Heavisides stegfunktion.

**Definition 4.4 (Heavisides stegfunktion)** Heavisides stegfunktion  $\theta(t) = 1$  för  $t > 0$  och  $\theta(t) = 0$  för  $t \leq 0$ .

Eftersom  $\theta(t) = 0$  för  $t \leq 0$  har den Laplacetransform  $\mathcal{L}(\theta(t))(s) = \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$ . Diskontinuiteten i 0:an påverkar inte integralen eftersom vi har definierat integralen för styckvis kontinuerliga funktioner och integralens värde påverkas inte av funktionens värde i en enskild punkt.

Genom definitionen av Heavisides stegfunktion kan vi även studera fördröjning. I tillämpningar innebär fördröjning till exempel att en spänning slås på vid en given tidpunkt  $T$  i framtiden. Vi har nu nytta av att vi definierat integralen för styckvis kontinuerliga funktioner.

**Sats 4.9 (Fördröjning)** Låt  $f(t)$  vara en given funktion med Laplacetransform  $F(s)$ ,  $T > 0$  vara ett tal och  $\theta(t)$  vara Heavisides stegfunktion. Då gäller

$$\mathcal{L}(f(t - T)\theta(t - T))(s) = e^{-sT} F(s). \quad (4.52)$$

*Bevis.* Vi har

$$\mathcal{L}(f(t - T)\theta(t - T))(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t - T)\theta(t - T) dt \quad (4.53)$$

$$= \int_T^{\infty} e^{-st} f(t - T) dt = \int_T^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+T)} f(\tau) d\tau = e^{-sT} F(s). \quad (4.54)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+T)} f(\tau) d\tau = e^{-sT} F(s). \quad (4.55)$$

□

**Exempel 4.10 (Laplacetransform vid fördröjning)** För att bestämma Laplacetransformen av den funktion som beskriver att en spänning av storlek  $E$  slås på vid tiden  $t = 1$ , kan vi använda Heavisides stegfunktion och sats 4.9. Vi har  $f(t) = E\theta(t - 1)$ . Vi får

$$\mathcal{L}(E\theta(t - 1))(s) = E \frac{e^{-s}}{s}, \quad (4.56)$$

eftersom  $\mathcal{L}(\theta(t)) = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$ .

Ett annat fenomen som är vanligt i tillämpningar är krafter som verkar med stor styrka under kort tid, så kallade impulser. Om vi låter  $\epsilon > 0$  vara ett litet tal så definierar vi den diskontinuerliga funktionen  $\delta_\epsilon(t)$  på följande vis,

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon}, & -\epsilon < t < \epsilon, \\ 0, & t \geq \epsilon. \end{cases} \quad (4.57)$$

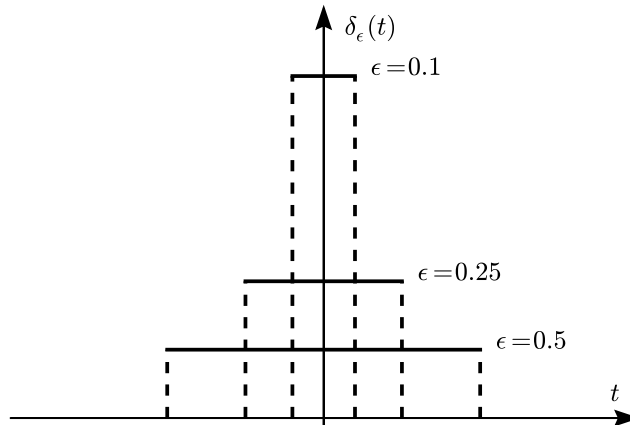
I figur 4.3 ser vi hur funktionen  $\delta_\epsilon(t)$  för mindre och mindre värden på  $\epsilon$  växer mot en impuls i origo men att integralen förblir konstant  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1$  för alla  $\epsilon$ . Vi har även att  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = 0$  för alla  $t \neq 0$ . Vi vill studera den generaliserade funktion  $\delta$  som uppkommer då vi låter  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Definition 4.5 (Diracs delta)** Diracs delta är en idealiserad enhetspuls i  $t = 0$  sådan att  $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = 0$  för alla  $t \neq 0$  och med  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1$  för alla  $\epsilon > 0$ .

En impuls i tidpunkt  $t_0 > 0$  uttrycks som  $\delta(t - t_0)$ . En viktig egenskap för Diracs delta är att givet en kontinuerlig funktion  $f(t)$  gäller att,

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_0^{\infty} \delta_\epsilon(t - t_0) f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} f(t_0 + c_\epsilon) = f(t_0). \quad (4.58)$$

Vi använder medelvärdessatsen för integraler som säger att  $\int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} f(t) dt = 2\epsilon f(t_0 + c_\epsilon)$  för något  $c_\epsilon \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ . Integralen av produkten mellan  $\delta(t - t_0)$  och en kontinuerlig funktion  $f(t)$  blir



Figur 4.3: Funktionen  $\delta_\epsilon(t)$  där  $\epsilon = 0.5, 0.25, 0.1$ .

alltså funktionens värde i  $t_0$ . Denna egenskap brukar användas för att definiera Diracs delta. Diracs delta uppfyller inte de krav vi har satt upp på funktioner för att de ska kunna ha en Laplacetransform, nämligen  $|f(t)| \leq Ce^{at}$ . Den uppfyller inte ens kravet på att vara en funktion utan brukar betraktas som en generaliserad funktion. Integralen i vänsterledet av (4.58) är inte heller definierad i den vanliga meningen, men ges en mening av (4.58). Detta kan användas för att definiera Laplacetransformen av  $\delta$ .

**Sats 4.10 (Laplacetransform av Diracs delta)** Vi har att

$$\mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s) = e^{-st_0}, \quad (4.59)$$

för alla  $t_0 \geq 0$ . Speciellt gäller  $\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$ .

*Bevis.* Vi antar först att  $t_0 > 0$  och  $\epsilon < t_0$  och studerar Laplacetransformen av  $\delta_\epsilon(t - t_0)$ :

$$\mathcal{L}(\delta_\epsilon(t - t_0))(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta_\epsilon(t - t_0) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \frac{e^{-st}}{2\epsilon} dt = \frac{1}{2\epsilon s} e^{-st_0} (e^{s\epsilon} - e^{-s\epsilon}). \quad (4.60)$$

Vi kan nu låta  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . L'Hôpitals regel ger att  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{s\epsilon} - e^{-s\epsilon}}{2s\epsilon} = 1$ . Därför gäller

$$\mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s) = e^{-st_0}. \quad (4.61)$$

Vi utvidgar nu resultatet till  $t_0 = 0$  genom att gå i gräns:

$$\mathcal{L}(\delta(t))(s) = \lim_{t_0 \rightarrow 0^+} e^{-st_0} = 1. \quad (4.62)$$

□



## 4.6 Lösning av begynnelsevärdesproblem

Vi går nu tillbaka till det ursprungliga problemet att lösa linjära ODE som motiverade införandet av Laplacetransformen. Metoden fungerar om koefficienterna till ekvationen är konstanta. Fördelen med Laplacetransform är att den ger ett systematiskt sätt att beräkna partikulärlösningar utan att man behöver ansätta en lösning. Diskontinuerliga högerled och impulser kan dessutom hanteras. Vid lösning med Laplacetransform följer vi fyra steg som vi såg redan i det första motiverande exemplet. Principen är följande:

1. Laplacetransformera differentialekvationen.
2. Sätt in begynnelsevillkoren.
3. Lös den algebraiska ekvationen (här behövs ofta partialbråksuppdelning användas).
4. Använd tabell för att beräkna den inversa Laplacetransformen som ger lösningen till differentialekvationen.

I nedanstående sats sammanfattar vi några Laplacetransformer.

**Sats 4.11 (Tabell av Laplacetransformer)** Låt  $F(s)$  och  $G(s)$  vara Laplacetransformer till  $f(t)$  respektive  $g(t)$ . Då gäller

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))(s) = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad (4.63)$$

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (4.64)$$

$$\mathcal{L}(f(t-T)\theta(t-T))(s) = e^{-sT} F(s) \quad (4.65)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1 \quad (4.66)$$

$$\mathcal{L}(\theta(t))(s) = \frac{1}{s} \quad (4.67)$$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (4.68)$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{-t})(s) = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}} \quad (4.69)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at})(s) = \frac{1}{s+a} \quad (4.70)$$

$$\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (4.71)$$

$$\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (4.72)$$

$$(4.73)$$

*Bevis.* Alla utom de sista två ges som exempel i texten ovan. Vi låter  $f(t) = \sin(at)$ . Den komplexa expo-

nentialfunktionen kan skrivas  $e^{iat} = \cos(at) + i \sin(at)$ . Vi har att  $\sin(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$  vilket ger

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} dt \quad (4.74)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{(ia-s)t} - e^{(-ia-s)t} dt \quad (4.75)$$

$$= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{ia-s} e^{(ia-s)t} + \frac{1}{s+ia} e^{-(ia+s)t} \right]_0^{\infty} \quad (4.76)$$

$$= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) \quad (4.77)$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{2ia}{s^2 + a^2} \quad (4.78)$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}. \quad (4.79)$$

Vi kan använda Laplacetransformen för derivata för att transformera  $\cos(at)$ . Vi har

$$\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \sin(at)\right) = \frac{s}{a} F(s) - \frac{1}{a} \sin(0) = \frac{s}{s^2 + a^2}. \quad (4.80)$$

□

Vi börjar med två exempel på ordinära differentialekvationer som kan lösas med Laplacetransform.

**Exempel 4.11 (Begynnelsevärdesproblem)** Vi studerar följande ordinära differentialekvation. Låt  $u(t)$  vara lösning till

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = e^{-t}, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \quad (4.81)$$

Vi Laplacetransformerar ekvationen och låter  $U(s)$  beteckna Laplacetransformen av  $u(t)$

$$s^2 U(s) - su(0) - u'(0) + 2sU(s) - 2u(0) + U(s) = \mathcal{L}(e^{-t})(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (4.82)$$

Här använder vi sats 4.4 om Laplacetransformen av derivator. Genom att sätta in begynnelsevärdena och flytta om termer får vi

$$(s^2 + 2s + 1)U(s) = \frac{1}{s+1} + 1, \quad (4.83)$$

vilket ger

$$U(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2}. \quad (4.84)$$

Vi använder nu sats 4.II,  $\mathcal{L}(t^n e^{-t})(s) = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$ , för att dra slutsatsen att  $u(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + t e^{-t}$ .

I exemplet ser vi att den karakteristiska ekvationen  $r^2 + 2r + 1 = 0$  har en dubbelrot  $r = -1$ . Laplacetransformen hanterar detta, utan speciella ansatser, med hjälp av partialbråksuppdelning. Vi ser även hur tabellen av Laplacetransformer används för att transformera tillbaka till tidsdomänen.

Ett stort tillämpningsområde för Laplacetransform är elektriska nät. Relationen mellan ström, spänning, resistans och induktans kan beskrivas med hjälp av en ODE.

**Exempel 4.12 (Elektrisk krets)** En spole med resistans  $R$  och induktans  $L$  är seriekopplad till en generator med spänning  $u(t) = E$ . Strömmen  $i(t)$  kan då beräknas som lösningen till ekvationen

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = u(t) = E, \quad i(0) = 0. \quad (4.85)$$

Vi låter Laplacetransformen till  $i(t)$  vara  $I(s)$  och får

$$RI(s) + LsI(s) = \frac{E}{s}. \quad (4.86)$$

Omskrivning ger

$$I(s) = \frac{E}{s(R + Ls)} = \frac{\frac{E}{L}}{s(s + \frac{R}{L})}. \quad (4.87)$$

Sats 4.8 om faltning ger att

$$i(t) = \frac{E}{L} \int_0^t 1 \cdot e^{-\frac{R}{L}\tau} d\tau = \frac{E}{L} \left[ -\frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}\tau} \right]_0^t = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (4.88)$$

Vi ger nu ännu ett exempel på en elektrisk krets som leder till något som kallas en integro-differentialekvation. Det är en differentialekvation som även innehåller en integral.

**Exempel 4.13 (Elektrisk krets)** En spole med induktans  $L$ , en resistor med resistans  $R$  och en kondensator med kapacitans  $C$  är seriekopplade med en spänningskälla med spänning  $E(t) = e^{-2t}$ . Strömmen  $i(t)$  ges då som lösningen till ekvationen

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t). \quad (4.89)$$

Låt  $L = 1$ ,  $R = 4$ ,  $C = \frac{1}{3}$  och beräkna strömmen  $i(t)$  om  $i(0) = 0$ . Vi Laplacetransformerar och får

$$sI(s) + 4I(s) + \frac{3}{s}I(s) = \frac{1}{s+2}. \quad (4.90)$$

Vi multiplicerar med  $s$  och löser ut  $I(s)$

$$I(s) = \frac{s}{s+2} \cdot \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s}{(s+2)(s+1)(s+3)}, \quad (4.91)$$

eftersom  $s^2 + 4s + 3 = 0$  har lösningar  $s_1 = -1$  och  $s_2 = -3$ . Vi genomför nu partialbråksuppdelning:

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}. \quad (4.92)$$

Genom att göra liknämning får vi ekvationen

$$s = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2) \quad (4.93)$$

$$= As^2 + 5As + 6A + Bs^2 + 4Bs + 3B + Cs^2 + 3Cs + 2C \quad (4.94)$$

som ska gälla för alla  $s$ . Detta leder till tre ekvationer med tre obekanta, nämligen ekvationerna för  $s^2$ ,  $s$  och 1 termerna

$$0 = A + B + C, \quad (4.95)$$

$$1 = 5A + 4B + 3C, \quad (4.96)$$

$$0 = 6A + 3B + 2C. \quad (4.97)$$

Eftersom  $A + B + C = 0$  ger den andra ekvationen att  $1 = 2A + B$  och den tredje  $0 = 4A + B$  eller  $B = -4A$ . Sätter vi in det får vi  $1 = 2A - 4A$  vilket innebär att  $A = -\frac{1}{2}$ ,  $B = 2$ , och därmed  $C = -A - B = -\frac{3}{2}$ . Vi får alltså att

$$I(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+3}. \quad (4.98)$$

Genom att använda sats 4.11 kan vi Laplacetransformera tillbaka och slutligen få

$$i(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t}. \quad (4.99)$$

## Övningar

### 4.1 Definition av Laplacetransform

**Övning 4.1** Bestäm för vilka  $s \in \mathbb{C}$  Laplacetransformen av  $f(t)$  är väldefinierad.

(a)  $f(t) = e^t \cos(t)$  (b)  $f(t) = e^{3t} \sin(t)$  (c)  $f(t) = t + 2$  (d)  $f(t) = 3000$

**Övning 4.2** Bestäm för vilka  $s \in \mathbb{C}$  Laplacetransformen av  $f(t)$  är väldefinierad.

(a)  $f(t) = t^2$  (b)  $f(t) = (t+1)(t-1)$  (c)  $f(t) = te^t$  (d)  $f(t) = e^{2t} \sin^2(t)$

**Övning 4.3** Beräkna uttrycket givet att  $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$  och  $\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$ .

(a)  $\mathcal{L}(3t + t^2)(s)$  (b)  $\mathcal{L}(t + 3t^2)(s)$  (c)  $\frac{\mathcal{L}(2t-2t^2)(s)}{s}$  (d)  $\mathcal{L}(t(a+bt))(s)$

**Övning 4.4** Bestäm  $f(t)$  för den Laplacetransformerade funktionen  $F(s)$ .

(a)  $F(s) = \frac{7}{s^2}$  (b)  $F(s) = \frac{12}{s^4}$  (c)  $F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{6}{s^4}$  (d)  $F(s) = \frac{3}{s-4}$

**Övning 4.5** Om möjligt, ange  $a$  och  $C$  så att  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  för alla  $t \geq 0$ , annars motivera varför det inte går.

(a)  $f(t) = 10 \sin(t^2)e^{3t}$  (b)  $f(t) = 5te^{5t}$  (c)  $f(t) = e^{t^2}$  (d)  $f(t) = \ln(t+1)e^t$

### 4.2 Tekniker för att beräkna Laplacetransform

**Övning 4.6** Använd skalning för att bestämma Laplacetransformen till  $f(t)$ .

(a)  $f(t) = e^{5t} + (3t)^2$  (b)  $f(t) = te^{-t} + e^t$  (c)  $f(t) = \sin(2t) + \cos(2t)$  (d)  $f(t) = e^t + e^{2t} + \dots + e^{nt}$

**Övning 4.7** Bestäm Laplacetransformen till  $f(t)$  samt för vilka  $s \in \mathbb{C}$  Laplacetransformen är väldefinierad.

(a)  $f(t) = e^{4t} \cos(t)$  (b)  $f(t) = t^2 e^{3t}$  (c)  $f(t) = e^{2t}t + 2e^{2t}$  (d)  $f(t) = t(e^t + e^{2t})$

**Övning 4.8** Bestäm den funktion vars Laplacetransform är  $F(s)$ .

(a)  $F(s) = \frac{5}{s^2+3s-4}$  (b)  $F(s) = \frac{2s-5}{s^2-5s+6}$  (c)  $F(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$  (d)  $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

**Övning 4.9** Bestäm den funktion vars Laplacetransform är  $F(s)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s}{s^2-6s+5}$  (b)  $F(s) = \frac{s^2+s+2}{s^3+s^2+2s^2}$  (c)  $F(s) = \frac{s+4}{s^3}$  (d)  $F(s) = \frac{2s^2+5s+50}{s^3+25s}$

**Övning 4.10** Bestäm den funktion vars Laplacetransform är  $F(s)$ .

(a)  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  (b)  $F(s) = \frac{3s^2-2s-4}{s^3-s^2-4s+4}$  (c)  $F(s) = \frac{2s-2}{s^2-2s-15}$  (d)  $F(s) = \frac{s^3+3s^2+12}{s^4+4s^2}$

### 4.3 Laplacetransform av derivator och integraler

**Övning 4.11** Låt  $f(t)$  vara en given funktion sådan att  $f(0) = 3$ ,  $f'(0) = 7$ ,  $f''(0) = -4$  och  $f'''(0) = 11$ . Låt Laplacetransformerna av  $f(t)$  betecknas med  $F(s)$ . Bestäm Laplacetransformerna av uttrycket i termer av  $F(s)$ .

(a)  $f'(t)$  (b)  $f''(t)$  (c)  $f'''(t)$  (d)  $f''''(t)$

**Övning 4.12** Bestäm Laplacetransformerna för ODE:n.

(a)  $f''(t) + 3f'(t) = e^{-t}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  (b)  $f''(t) - 2f'(t) = t^2$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 2$   
 (c)  $4f''(t) + f'(t) + 3f(t) = \sin(2t)$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  (d)  $f'''(t) + 2f''(t) + f(t) = 10$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$ ,  $f''(0) = 3$

**Övning 4.13** Bestäm Laplacetransformerna för  $f(t)$ .

(a)  $f(t) = t \cos(t)$  (b)  $f(t) = t \sin(3t)$  (c)  $f(t) = te^{3t}$  (d)  $f(t) = t^2 e^{3t}$

**Övning 4.14** Bestäm Laplacetransformerna för  $f(t)$ .

(a)  $f(t) = \int_0^t \cos(\tau) d\tau$  (b)  $f(t) = \int_0^t e^{2\tau} d\tau$  (c)  $f(t) = \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$  (d)  $f(t) = \frac{d}{dt} \sin(5t)$

**Övning 4.15** Bestäm Laplacetransformerna för ODE:n.

(a)  $f'''(t) - f'(t) + f(t) = t$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$   
 (b)  $f'''(t) + f''(t) - f(t) = e^{2t}$   $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 1$   
 (c)  $f''(t) + 5f'(t) - 5f(t) = \cos(3t)$   $f(0) = -1$ ,  $f'(0) = 2$   
 (d)  $f''''(t) - 3f(t) = t^2$   $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 1$ ,  $f'''(0) = 2$

#### 4.4 Faltning, impuls och diskontinuerliga funktioner

**Övning 4.16** Utifrån den givna Laplacetransformerna  $H(s)$ , beräkna dess inversa funktion  $h(t)$  genom att använda faltning.

(a)  $H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  (b)  $H(s) = \frac{2}{s^4+4s^2}$  (c)  $H(s) = \frac{1}{s^2-4}$  (d)  $H(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}$

**Övning 4.17** Bestäm Laplacetransformerna till impulsfunktionen  $f(t)$ .

(a)  $f(t) = 3\delta(t-2) + \delta(t-1)$  (b)  $f(t) = 2\delta(t+2) - \delta(t+1)$  (c)  $f(t) = \delta(t+1) + \delta(t)$   
 (d)  $f(t) = -2\delta(t-2) + 2\delta(t-2)$

**Övning 4.18** Bestäm gränsvärdet.

(a)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \delta_\epsilon \cos(x) dx$  (b)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon x^2 dx$  (c)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \delta_\epsilon e^{2x} dx$  (d)  
 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \delta_\epsilon x \sin(x) dx$

**Övning 4.19** Bestäm Laplacetransformerna för  $f(t)$  där  $\theta$  är Heavisides stegfunktion.

(a)  $f(t) = \theta(t-T)e^{-t}$  (b)  $f(t) = t^2\theta(t-T)$  (c)  $f(t) = \sin(2t)\theta(t-3T)$  (d)  
 $f(t) = \theta(t-T)t^2e^{-t}$

**Övning 4.20** Bestäm Laplacetransformen för  $f(t)$ .

- (a)  $f(t) = \theta(t) - \theta(t - 2)$  (b)  $f(t) = \theta(t + 2) - \theta(t - 2)$  (c)  $f(t) = \theta(t - 3) + \theta(t + 1)$   
 (d)  $f(t) = \theta(t - m) - \theta(t - k), 0 < k < m$

#### 4.5 Lösning av ODE med Laplacetransform

**Övning 4.21** Använd Laplacetransform för att lösa differentialekvationen.

- (a)  $u''(t) = \delta(t), u(0) = 0, u'(0) = 0$  (b)  $u'(t) + 2u(t) = t, u(0) = 0$  (c)  $u''(t) - u(t) = e^{-2t}, u(0) = 0, u'(0) = -1$ . (d)  $u''(t) + 9u(t) = 3, u(0) = 0, u'(0) = 0$ .

**Övning 4.22** Använd Laplacetransform för att lösa differentialekvationen.

- (a)  $u'(t) + ku(t) = t, u(0) = 0$  (b)  $u'(t) + u(t) = e^t, u(0) = 2$  (c)  $u''(t) = 12t^2, u(0) = 0, u'(0) = 0$  (d)  $u'(t) + 3u(t) = 3, u(0) = 1$

**Övning 4.23** Använd Laplacetransform för att lösa differentialekvationen.

- (a)  $2u'(t) + 4u(t) = 1, u(0) = 3$ . (b)  $u''(t) + 9u(t) = 3\delta(t), u(0) = -9, u'(0) = 0$  (c)  $u'(t) - 3u(t) = e^t, u(0) = 2$  (d)  $u'(t) = \sin(3t), u(0) = 4$

**Övning 4.24** Använd Laplacetransform för att lösa differentialekvationen.

- (a)  $\int_0^t u(\tau) d\tau + 3u(t) = 2$  (b)  $\int_0^t 3u(\tau) d\tau + u(t) = -t$  (c)  $4 \int_0^t u(\tau) d\tau + u'(t) = 2, u(0) = 0$  (d)  $\int_0^t u(\tau) d\tau = t^2$

**Övning 4.25** Använd Laplacetransform för att lösa differentialekvationen.

- (a)  $u''(t) + u(t) = 0, u(0) = 1, u'(0) = -1$  (b)  $2u''(t) - u'(t) = -1, u(0) = 0, u'(0) = 0$   
 (c)  $u'(t) + 4u(t) = \delta(t), u(0) = 3$  (d)  $u''(t) + 4u(t) = e^{2t}, u(0) = 0, u'(0) = 2$

## Problem

### 4.1 Definition av Laplacetransform

**Problem 4.1** Antag att  $|f(t)| + |f'(t)| \leq Ce^{at}$  för några  $a, C \geq 0$ . Visa att  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$  genom att använda partiell integration.

### 4.2 Tekniker för att bestämma Laplacetransform

**Problem 4.2** Bestäm Laplacetransformen av  $\sin(t + 1)$ .

**Problem 4.3** Bestäm Laplacetransformen av  $f(t) = t^n$ . Gäller  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  för några  $a, C \geq 0$ ?

### 4.3 Laplacetransform av derivator och integraler

**Problem 4.4** Antag att  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$  existerar. Visa att  $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^\infty F(z) dz$ .

**Problem 4.5** Bestäm Laplacetransformen till  $\frac{\sin(t)}{t}$ .

#### 4.4 Impuls och diskontinuerliga funktioner

**Problem 4.6** Visa att  $\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t \delta_\epsilon(\tau) d\tau$ .

**Problem 4.7** Låt  $f(t) = t, 0 < t < 1, f(t) = 1, 1 \leq t < 2, f(t) = 3 - t, 2 \leq t < 3$  och annars 0. Uttryck  $f(t)$  med hjälp av stegfunktioner och bestäm dess Laplacetransform.

#### 4.5 Lösning av begynnelsevärdesproblem med Laplacetransform

**Problem 4.8** Använd Laplacetransform för att lösa ekvationen,  $u'' + 2u' + u = f(t), u(0) = 0, u'(0) = 1$ , där  $f(t)$  uppfyller  $|f(t)| \leq Ce^{at}$ .

**Problem 4.9** Lös begynnelsevärdesproblemet  $u'(t) - 2u(t) + \int_0^t u(s) ds = e^t$ , där  $u(0) = 1$ .

**Problem 4.10** Bestäm lösningarna  $u_1(t)$  och  $u_2(t)$  till det kopplade begynnelsevärdesproblemet

$$\dot{u}_1(t) + u_2(t) = 2t + \frac{1}{6}t^3, \quad (4.100)$$

$$\dot{u}_2(t) - u_1(t) = 0, \quad (4.101)$$

med begynnelsevillkor  $u_1(0) = 1$  och  $u_2(0) = 0$  genom att Laplacetransformera båda ekvationerna.



# 5. System av ODE

5.1	Introduktion till linjär algebra	91
5.2	System av första ordningens ODE	96
5.3	Högre ordningens ODE	99
5.4	Existens och entydighet av lösning	101
5.5	Alternativ definition av $\exp(x)$ och $\ln(x)$	104
5.6	Alternativ definition av $\cos(x)$ och $\sin(x)$	107

*System av ordinära differentialekvationer är vanligt förekommande inom mekanik, matematisk biologi, kemi och många andra discipliner. I detta kapitel introducerar vi matris-vektornotation för att enklare kunna arbeta med system av ODE. Vi visar att högre ordningens ODE kan skrivas om som system av första ordningen genom införandet av hjälpvariabler. Existens och entydighet av lösning för ekvationer med Lipschitz-kontinuerliga högerled följer genom en generalisering av Picards sats. Vi använder existensresultatet för att ge alternativa definitioner till elementära funktioner som lösningar till differentialekvationer.*

## 5.1 Introduktion till linjär algebra

Vi börjar med en kort introduktion till linjär algebra, för att kunna införa lämplig notation för system av ODE. Ett centralt begrepp inom linjär algebra är vektorer.

**Definition 5.1 (Vektornotation)** En vektor  $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  är en uppsättning av  $n \in \mathbb{N}$  tal  $v_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ . Talen  $v_i$  kallas komponenter. Vi skriver  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Vektorer har en rad karakteristiska algebraiska egenskaper. De kan adderas och multipliceras med tal (skalärer). Givet två vektorer  $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  och  $\vec{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$  med lika många element fås summan genom att summera komponentvis

$$\vec{v} + \vec{w} = [v_1 + w_1 \ v_2 + w_2 \ \dots \ v_n + w_n]. \quad (5.1)$$

Multiplikation mellan en skalär  $\alpha \in \mathbb{R}$  och en vektor  $\vec{v}$  fås genom att multiplicera varje komponent med skalären

$$\alpha\vec{v} = [\alpha v_1 \ \alpha v_2 \ \dots \ \alpha v_n]. \quad (5.2)$$

Vektorn  $u = \alpha v + \beta w$  med  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  kallas linjär kombination av  $v$  och  $w$ .

Vektorer kan även multipliceras med varandra förutsatt att de har lika många element. Skalärprodukten tar två vektorer som indata och ger ut ett tal, en skalär, som utdata.

**Definition 5.2 (Skalärprodukt och längd)** Låt  $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  och  $\vec{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$  vara två vektorer. Skalärprodukten ges av  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ . Längden ges av  $|\vec{v}| = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2} = (\sum_{i=1}^n v_i^2)^{1/2}$ .

**Exempel 5.1 (Längd och skalärprodukt)** Bestäm skalärprodukten av vektorerna  $\vec{v} = [2 \ 1 \ -2]$  och  $\vec{w} = [0 \ -2 \ -2]$  samt längden av  $\vec{v}$ . Vi får  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) = 2$ . Längden ges av  $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$ .

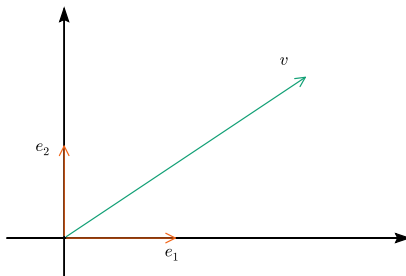
Längden av en vektor  $\vec{v} = [v_1 \ v_2] \in \mathbb{R}^2$  ges alltså av  $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  vilket är avståndet mellan origo och punkten  $(v_1, v_2)$  enligt Pythagoras sats. På samma sätt motsvarar längden i högre dimension avståndet mellan punkten och origo, som kan härledas genom upprepad användning av Pythagoras sats.

Vi inför enhetsvektorerna  $\vec{e}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ ,  $\vec{e}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$  till och med  $\vec{e}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]$  innehållande  $n$  element. Varje vektor  $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  kan skrivas som en linjärkombination av enhetsvektorerna multiplicerat med vektorns element på följande vis

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i. \quad (5.3)$$

Enhetsvektorerna har längd  $|\vec{e}_i| = 1$ . Skalärprodukten mellan enhetsvektorerna ges av  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$  och  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$  om  $i \neq j$ .

Vektorer har även en geometrisk tolkning som en riktad sträcka i  $\mathbb{R}^n$ . De brukar representeras som pilar. I figur 5.1 ser vi en vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  tillsammans med enhetsvektorerna  $\vec{e}_1$  och  $\vec{e}_2$ . Vi noterar att vektorn  $\vec{v}$  representerar den riktade sträckan mellan punkten  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  och origo och dess längd  $|\vec{v}|$  är alltså sträckans längd. De geometriska tolkningarna av addition av vektorer och multiplikation med



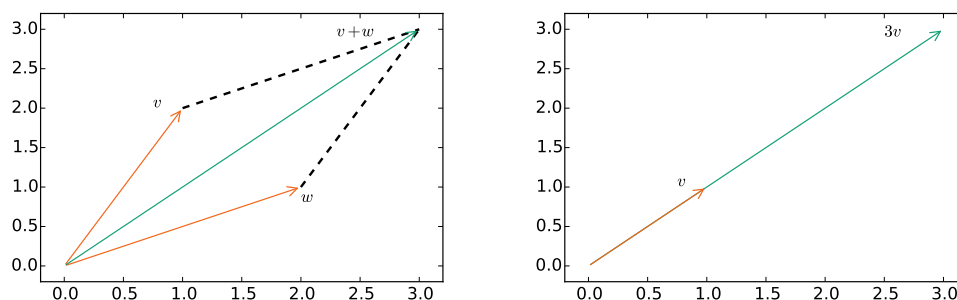
Figur 5.1: En vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  tillsammans med enhetsvektorerna  $\vec{e}_1$  och  $\vec{e}_2$ .

skalär illustreras i figur 5.2 med exemplen  $[2 \ 1] + [1 \ 2] = [3 \ 3]$  (vänster) och  $3 [1 \ 1] = [3 \ 3]$  (höger).

Även skalärprodukten har en geometrisk tolkning. Den geometriska skalärprodukten definieras som

$$v \cdot w = |v||w| \cos(\phi), \quad (5.4)$$

där  $\phi$  är den mellanliggande vinkeln. Skalärprodukten är som mest produkten av längderna och som minst minus produkten av längderna eftersom  $\cos(x)$  tar värden mellan  $-1$  och  $1$ . Om den mellanliggande vinkeln är  $\pi/2$  blir produkten noll. Vi säger då att vektorerna är vinkelräta eller ortogonala mot varandra.



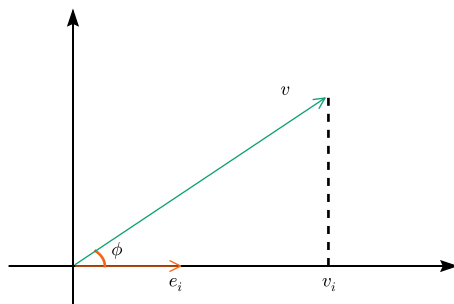
Figur 5.2: Geometrisk tolkning av summan av två vektorer (vänster) och multiplikation med skalär (höger).

Detta gäller till exempel enhetsvektorerna. Om vinkeln är 0 blir skalärprodukten lika med produkten av vektorernas längder.

De två definitionerna av skalärprodukt är ekvivalenta. Vi kan se det med följande argument. Vi bildar den geometriska skalärprodukten mellan en vektor  $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  och enhetsvektorn  $\vec{e}_i$ . Vi får

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_i = |\vec{v}| \cos(\phi) = v_i, \quad (5.5)$$

där  $\phi$  är vinkeln mellan  $\vec{v}$  och  $\vec{e}_i$ . I figur 5.3 illustrerar vi detta resultat genom att välja koordinatsystemet så att den horisontella axeln går i riktningen av  $\vec{e}_i$ . Detta innebär att definitionerna är ekvivalenta för skalär-



Figur 5.3: En vektor  $\vec{v}$  i ett koordinatsystem där  $x$ -axeln väljs i linje med enhetsvektorn  $\vec{e}_i$ . Vinkeln mellan vektorerna ges av  $\phi$  och längden av  $\vec{v}$ -vektorns komponent i riktning  $\vec{e}_i$  ges av talet  $v_i$ .

produkt mellan en godtycklig vektor och en enhetsvektor. Men en godtycklig vektor kan skrivas som en linjärkombination av enhetsvektorer  $\vec{w} = \sum_{i=1}^n w_i \vec{e}_i$  så därför gäller att den geometriska definitionen leder till den algebraiska

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n w_i (\vec{v} \cdot \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n w_i v_i. \quad (5.6)$$

Vi går nu vidare till matriser.

**Definition 5.3 (Matrisnotation)** En  $n \times m$  matris  $A$ , med  $n$  rader och  $m$  kolumner, är ett rektangulärt talschema. Matrisen  $A$  med element  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$  och  $1 \leq j \leq m$  skrivs

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Addition av matriser och multiplikation med skalär görs elementvis på samma sätt som för vektorer

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

och

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

En vektor kan ses som ett specialfall av en matris med antingen endast en rad eller en kolumn.

**Definition 5.4 (Rad- och kolumnvektor)** En  $n \times 1$  matris kallas en kolumnvektor. En  $1 \times m$  matris kallas radvektor.

En kolumnvektor kan skrivas med följande notation  $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$ . Beteckningen  $T$  står för transponat och kan även appliceras på matriser enligt följande, där elementen  $a_{ij}$  och  $a_{ji}$  byter plats:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

En matris kan multipliceras med en vektor om antalet kolumner i matrisen är samma som antal rader i vektorn.

**Definition 5.5 (Matris-vektormultiplikation)** Låt  $A$  vara  $n \times m$  matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

och låt  $\vec{x}$  vara  $m \times 1$  kolumnvektorn

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Då ges produkten av  $A$  och  $\vec{x}$  som en  $n \times 1$  vektor där varje rad är skalärprodukten mellan motsvarande rad i  $A$  och vektorn  $\vec{x}$ , alltså

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

**Exempel 5.2 (Matris-vektor multiplikation)** Beräkna följande matris-vektorprodukt

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ 0.5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4.5 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Vi ser att produkten beräknas som skalärprodukt mellan rader i matrisen och kolumnvektorn.

En linjär ekvation med  $n$  obekanta har formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.15)$$

Med matrisnotationen kan vi skriva system av sådana ekvationer och senare system av ordinära differentialekvationer, på ett kompakt sätt.

**Definition 5.6 (Linjära ekvationssystem)** Ett linjärt ekvationssystem med  $n$  ekvationer och  $n$  obekanta kan skrivas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5.16)$$

eller på matrisform som

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad (5.17)$$

där matrisen  $A$  har elementen  $a_{ij}$  och kolumnvektorerna  $\vec{x}$  och  $\vec{b}$  har komponenterna  $x_i$  respektive  $b_i$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Exempel 5.3 (Linjärt ekvationssystem)** Skriv följande ekvationssystem på matrisform:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

Vi låter

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Det linjära ekvationssystemet kan då skrivas som

$$A\vec{x} = \vec{b}. \quad (5.20)$$

Linjära ekvationssystem kan lösas på ett systematiskt sätt med Gauss-elimination. Har vi endast två eller tre obekanta kan vi lösa systemen för hand med substitution. Detta beskrivs enklast med ett exempel.

**Exempel 5.4 (Substitution)** Om vi vill lösa det linjära ekvationssystemet från föregående exempel kan vi till exempel lösa ut  $x_1 = -1 + x_2 + x_3$  ur den andra ekvationen och sätta in i den första och sista. Vi får då två ekvationer och två obekanta  $x_2$  och  $x_3$  nämligen

$$-1 + x_2 + x_3 + x_2 + x_3 = 2x_2 + 2x_3 - 1 = 3, \quad (5.21)$$

$$-2 + 2x_2 + 2x_3 + x_2 - 3x_3 = 3x_2 - x_3 - 2 = 0. \quad (5.22)$$

Vi använder nu den andra ekvationen för att lösa ut  $x_3 = 3x_2 - 2$  och sätter in det i den första

$$2x_2 + 2x_3 = 8x_2 - 4 = 4 \quad (5.23)$$

vilket ger  $x_2 = 1$ . Givet  $x_2 = 1$  har vi  $x_3 = 3x_2 - 2 = 1$  och  $x_1 = -1 + x_2 + x_3 = 1$ . Lösningen blir alltså  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ .

## 5.2 System av första ordningens ODE

Vi är nu redo att studera system av första ordningens ODE och vi börjar med det linjära fallet. För linjära system är matris-vektornotationen speciellt användbar. Både ekvationen och begynnelsevillkoren kan uttryckas på ett kompakt sätt.

**Definition 5.7 (Linjärt system av första ordningens ODE)** Ett linjärt ekvationssystem med  $n$  första ordningens differentialekvationer och  $n$  obekanta funktioner  $u_i(x)$  kan skrivas på formen

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}u_1(x) = a_{11}(x)u_1(x) + a_{12}(x)u_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)u_n(x) + b_1(x) \\ \frac{d}{dx}u_2(x) = a_{21}(x)u_1(x) + a_{22}(x)u_2(x) + \cdots + a_{2n}(x)u_n(x) + b_2(x) \\ \vdots \\ \frac{d}{dx}u_n(x) = a_{n1}(x)u_1(x) + a_{n2}(x)u_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)u_n(x) + b_n(x) \end{cases} \quad (5.24)$$

med begynnelsevillkor  $u_j(0) = c_j, j = 1, \dots, n$ . På matrisform får vi

$$\frac{d}{dx}\vec{u}(x) = A(x)\vec{u}(x) + \vec{b}(x), \quad \vec{u}(0) = \vec{c} \quad (5.25)$$

där matrisen  $A(x)$  har elementen  $a_{ij}(x)$  och vektorerna  $\vec{u}(x)$ ,  $\vec{b}(x)$  och  $\vec{c}$  har elementen  $u_i(x)$ ,  $b_i(x)$  respektive  $c_i$ , där  $1 \leq i, j \leq n$ .

Vi har  $n$  ekvationer och lika många obekanta  $u_i, i = 1, \dots, n$ . Dessutom krävs  $n$  begynnelsevillkor för att bestämma en unik lösning.

**Exempel 5.5 (Linjär ODE på matrisform)** Skriv följande system av ordinära differentialekvationer på matrisform:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}u_1(x) = 2u_2(x), & u_1(0) = 0, \\ \frac{d}{dx}u_2(x) = -u_1(x), & u_2(0) = 1. \end{cases} \quad (5.26)$$

Vi låter,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Det linjära ekvationssystemet kan då skrivas som

$$\frac{d}{dx}\vec{u}(x) = A\vec{u}(x), \quad \vec{u}(0) = \vec{c}. \quad (5.28)$$

På samma sätt som för linjära ekvationssystem kan substitution användas för att lösa system av linjära ODE.

**Exempel 5.6 (Linjärt system av ODE)** Lös systemet av ordinära differentialekvationer med substitution:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}u_1(x) = 2u_2(x), & u_1(0) = 0, \\ \frac{d}{dx}u_2(x) = -u_1(x), & u_2(0) = 1. \end{cases} \quad (5.29)$$

Vi sätter in  $u_2(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}u_1(x)$  från första ekvationen i den andra och får

$$\frac{d^2}{dx^2}u_1(x) + 2u_1(x) = 0. \quad (5.30)$$

Den karakteristiska ekvationen  $r^2 + 2 = 0$  har rötter  $r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ . Lösningen ges av

$$u_1(x) = A \cos(x\sqrt{2}) + B \sin(x\sqrt{2}). \quad (5.31)$$

Begynnelsevillkoren ger  $u_1(0) = A = 0$  och  $u_2(0) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}u_1(0) = \frac{B}{\sqrt{2}} = 1$  vilket ger  $u_1(x) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}x)$  och  $u_2(x) = \cos(\sqrt{2}x)$ .

Vi går nu till en mer generell beskrivning av system av första ordningens ODE. Vi använder vektornotationen för att uttrycka ett allmänt system på kompakt form.

**Definition 5.8 (Allmänt system av första ordningens ODE)** Ett allmänt ekvationssystem med  $n$  första ordningens differentialekvationer och  $n$  obekanta funktioner  $u_i(t)$  skrivs på formen

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}u_1(x) = f_1(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \\ \frac{d}{dx}u_2(x) = f_2(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \\ \vdots \\ \frac{d}{dx}u_n(x) = f_n(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \end{cases} \quad (5.32)$$

med begynnelsevillkor  $u_j(0) = c_j, j = 1, \dots, n$ . På vektorform får vi

$$\frac{d}{dx}\vec{u}(x) = \vec{f}(x, \vec{u}(x)), \quad \vec{u}(0) = \vec{c} \quad (5.33)$$

där vektorn  $\vec{f}$  har elementen  $f_i$  och vektorerna  $\vec{u}$  och  $\vec{c}$  har elementen  $u_i$  respektive  $c_i$ , där  $1 \leq i \leq n$ .

Vi har fortfarande  $n$  ekvationer,  $n$  obekanta samt  $n$  begynnelsevillkor. Vektornotationen kan alltså även användas för icke-linjära system av ODE. Vi fortsätter med ett klassiskt exempel på ett icke-linjärt system av ODE som modellerar dynamiken i ett slutet system av predatorer och bytesdjur.

**Exempel 5.7 (Rävar och kaniner)** En enkel modell för dynamiken i djurpopulationer är Volterra-Lotkas ekvation som beskriver populationen av predatorer och bytesdjur i ett slutet system. Rävarna (predatorerna) äter endast kaninerna (bytesdjuren) medan kaninerna har gott om mat. Vi låter antal rävar som funktion av tiden ges av  $y(t)$  och antal kaniner av  $x(t)$ . Lotka-Volterras modell ger följande icke-linjära första ordningens system av ODE

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - by(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (5.34)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t)(c - kx(t)), \quad y(0) = y_0 \quad (5.35)$$

där termen  $ax(t)$  anger att populationen kaniner ökar exponentiellt i avsaknad av rävar. Det finns alltså obegränsat med mat för kaninerna. Termen  $-bx(t)y(t)$  påverkar kaninbeståndet negativt och beskriver effekten av att rävar och kaniner träffar på varandra. Motsvarande term i rävarnas ekvation  $kx(t)y(t)$  verkar positivt på rävbeståndet. Slutligen avtar rävbeståndet exponentiellt i avsaknad av kaniner  $-cy(t)$ . Vi kan skriva systemet med vektornotation genom att införa

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \vec{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x(a - by) \\ -y(c - kx) \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

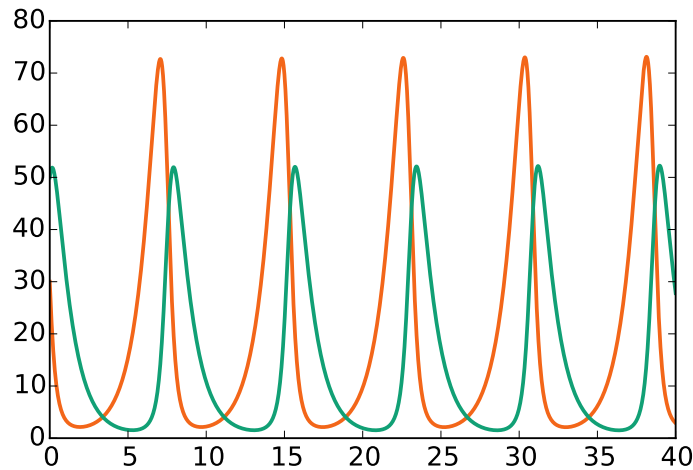
och  $\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ . På vektorform får vi

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{f}(t, \vec{v}(t)), \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0. \quad (5.37)$$

I figur 5.4 visar vi ett exempel på hur lösningen kan se ut. Vi börjar med 30 kaniner (orange) och 50 rävar (grön) och låter  $a = 1, b = 0.07, c = 1$  och  $k = 0.05$ . Sluttiden sätts till  $T = 40$ . Vi ser att när det finns ont om kaniner avtar rävarna i antal men då får kaninerna möjlighet att



öka igen vilket gör att råvarna får mer mat och börjar öka igen. Lösningarna är periodiska. Det finns två jämviktspunkter när populationerna inte ändras mer. Det kan fås fram genom att sätta  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ , alltså  $x(a - by) = 0$  och  $-y(c - kx) = 0$  med lösningar  $x = 0$  och  $y = 0$  eller  $x = \frac{c}{k} = 20$  och  $y = \frac{a}{b} = \frac{100}{7}$ . Notera att vi tillåter djurantalet att ej vara heltal.



Figur 5.4: Antal råvar (grön) och kaniner (orange) som funktion av tiden.

### 5.3 Högre ordningens ODE

I tillämpningar är systemen av ODE inte alltid av första ordningen. Positionerna i rummet för solsystemets planeter bestäms av ett system av andra ordningens ODE. Vi kan dock enkelt skriva om ett högre ordningens system till ett första ordningens system. Vi formulerar denna teknik i följande sats.

**Sats 5.1 (Högre ordningens ODE som system av första ordningen)** Låt  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vara en given funktion och  $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$  en uppsättning reella tal. En  $n$ :te ordningens ODE

$$u^{(n)} = F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n-1)}), \quad u^{(i)}(0) = c_i, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (5.38)$$

kan skrivas som ett system av första ordningens ODE. Här är  $u^{(i)} = \frac{d^i}{dx^i} u$ .

*Bevis.* Låt  $u_i = u^{(i-1)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , där  $u^{(0)} = u$ . Då kan ekvation (5.38) skrivas på formen

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} u_1(x) &= & u_2(x) \\ \frac{d}{dx} u_2(x) &= & u_3(x) \\ \vdots &= & \vdots \\ \frac{d}{dx} u_n(x) &= & F(x, u_1(x), \dots, u_n(x)), \end{cases} \quad (5.39)$$

vilket är ett system av första ordningen. Bergynnevillkoren ges av  $u_i(0) = c_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

**Exempel 5.8 (Vågutbredning)** Vi studerar longitudinell vågutbredning i ett system där två massor är sammanlänkade i fasta ytterväggar med tre fjädrar, se figur (5.5). Vi låter fjädrarna ha fjäderkonstant  $k$  och massorna massa  $m$ . Vi ställer upp ett system av första ordningens ODE vars lösning är avvikelsen från jämviktslägena  $x_1(t)$  och  $x_2(t)$  för de två massorna.

Newtons andra lag ( $F = m\ddot{x}$ , kraften är lika med massan gånger accelerationen) och Hookes lag ( $F = kx$ , kraften är proportionell mot förskjutning från jämviktsläget  $x$ ) ger två ekvationer som beskriver kraftjämvikt för de två massorna

$$m\ddot{x}_1(t) = -kx_1(t) + k(x_2(t) - x_1(t)), \quad (5.40)$$

$$m\ddot{x}_2(t) = -k(x_2(t) - x_1(t)) - kx_2(t). \quad (5.41)$$

Vi inför nu två nya variabler  $x_3(t) = \dot{x}_1(t)$  och  $x_4(t) = \dot{x}_2(t)$  och får följande system

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k/m & k/m & 0 & 0 \\ k/m & -2k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

med begynnelsevärden  $x_i(t) = c_i$  för  $i = 1, 2, 3, 4$ . Vi kan alltså skriva om systemet som ett system av första ordningens ODE.



Figur 5.5: Konfiguration av massor  $m$  och fjädrar  $k$  i exempel 5.8.

En stor mängd matematiska problem kan beskrivas som system av första ordningens ordinära differentialekvationer, inte minst på grund av att även högre ordningens ODE kan skrivas som system av första ordningen. En viktig fråga som då behöver besvaras är under vilka förutsättningar ett system av första ordningens ODE har unik lösning. I det skalära fallet ger Picards sats svaret på den frågan. Vi ska nu studera hur Picards sats kan generaliseras till system av ODE.

## 5.4 Existens och entydighet av lösning

På samma sätt som för skalära ODE av första ordningen kan vi garantera existens och entydighet av lösning under vissa antaganden på funktionen  $\vec{f}$ . Vi börjar med att definiera funktionsrummet  $C([a, b])^n$  av funktioner som tar värden i  $\mathbb{R}^n$ , så kallade vektorvärda funktioner.

**Definition 5.9 (Kontinuerliga funktioner i  $\mathbb{R}^n$ )** En vektorvärd funktion av en variabel  $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  är kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$  om samtliga komponenter  $u_i \in C([a, b])$ ,  $i = 1, \dots, n$ , är kontinuerliga. Vi skriver  $\vec{u} \in C([a, b])^n$ .

Vi behöver nu definiera normen (storleken) av en funktion i  $C([a, b])^n$ . Skillnaden från det skalära fallet är att längden på vektorn ersätter absolutbeloppet. Notationen är dock den samma.

**Definition 5.10 (Norm av vektorvärd funktion)** Vi definierar normen (storleken) på en kontinuerlig vektorvärd funktion  $\vec{f} \in C([a, b])^n$  som  $\|\vec{f}\| = \max_{x \in [a, b]} |\vec{f}(x)|$ .

Banachs fixpunktssats går att generalisera till vektorvärda funktioner.

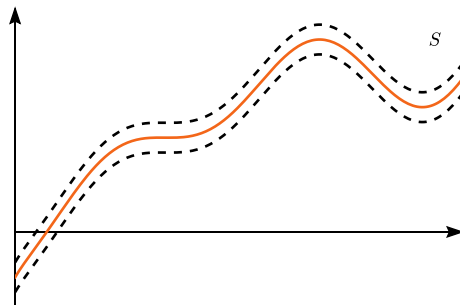
**Sats 5.2 (Banachs fixpunktssats för vektorvärda funktioner)** Givet  $\vec{u}_0 \in C([a, b])^n$  och  $r > 0$  låt  $S = \{\vec{u} \in C([a, b])^n : \|\vec{u} - \vec{u}_0\| \leq r\}$ . Låt vidare  $G$  vara en avbildning från  $S$  in i sig själv,  $G : S \rightarrow S$ . Dessutom natar vi att  $G$  är en kontraktion, det vill säga det finns något  $0 \leq \gamma < 1$  så att

$$\|G(\vec{u}) - G(\vec{z})\| \leq \gamma \|\vec{u} - \vec{z}\|, \quad \forall \vec{u}, \vec{z} \in S. \quad (5.43)$$

Då har  $G$  en unik fixpunkt  $\vec{u} = G(\vec{u})$ ,  $\vec{u} \in S$ . Dessutom konvergerar fixpunktsiterationen  $\vec{u}_i = G(\vec{u}_{i-1})$  givet  $\vec{u}_0 \in S$ , det vill säga det finns  $\vec{u} \in S$  sådant att  $\|\vec{u} - \vec{u}_i\| \rightarrow 0$  då  $i \rightarrow \infty$ .

*Bevis.* Beviset liknar Banachs fixpunktssats och bygger på fullständigheten hos  $C([a, b])^n$  istället för hos de reella talen.  $\square$

Figur 5.6 illustrerar mängden  $S$  i fallet  $n = 1$ . Kurvan är  $\vec{u}_0$  och streckade linjerna motsvarar det band med avstånd  $r$  från kurvan där funktionerna i  $S$  får ligga om de ska uppfylla  $\|\vec{u} - \vec{u}_0\| \leq r$ .



Figur 5.6: De streckade linjerna illustrerar det avstånd från en given kurva  $\vec{u}_0$  som funktionerna i  $S$  ligger inom.

Vi formulerar och bevisar nu satsen om existens och entydighet av lösning som är en generalisering av Picards sats. Satsen ger existens och entydighet i en omgivning till begynnelsevillkoret  $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$  precis som Picards sats.

**Sats 5.3 (Existens och entydighet)** Vi studerar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{u}), & x \in \mathbb{R} \\ \vec{u}(x_0) = \vec{u}_0, \end{cases} \quad (5.44)$$

där  $\vec{u}(x), \vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$  för alla  $x \in \mathbb{R}$  och  $\vec{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Låt vidare  $R = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq v_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n\}$  vara en generaliserad rektangel i  $\mathbb{R}^n$  sådan att  $\vec{u}_0 \in R$ . Om  $\vec{f}$  är kontinuerlig i  $x$ -variabeln på intervallet  $[a, b]$  innehållande  $x_0$  och lokalt Lipschitz-kontinuerlig i  $\vec{u}$ -variabeln, det vill säga

$$\|\vec{f}(x, \vec{u}_1) - \vec{f}(x, \vec{u}_2)\| \leq K\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|, \quad \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in R, \quad x \in [a, b], \quad (5.45)$$

så existerar unik lösning  $\vec{u}(x)$  till begynnelsevärdesproblemet i intervallet  $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$  för något  $\delta > 0$ .

*Bevis.* ★ Beviset är analogt med Picards sats för skalära ODE. Vi repeterar beviset i korthet. Vi integrerar (5.44) från  $x_0$  till  $x$

$$\vec{u}(x) = \vec{u}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{u}(t)) dt. \quad (5.46)$$

Om ekvation (5.46) har en lösning  $\vec{u}(x)$  så är den deriverbar och löser (5.44). Fixpunktsiteration ger en avbildning  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definierad av

$$\vec{\phi}_i := G(\vec{\phi}_{i-1}) = \vec{u}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{\phi}_{i-1}(t)) dt, \quad i = 1, \dots \quad (5.47)$$

Eftersom  $\vec{f}$  är kontinuerlig gäller att  $|\vec{f}(x, \vec{u})| \leq M$ , för  $x \in [a, b]$  och  $\vec{u} \in R$ . Vi låter  $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$  för något  $\delta > 0$  och bildar funktionsmängden  $S = \{\vec{\phi} \in C(I)^n : \|\vec{\phi}(x) - \vec{u}_0\| \leq r\}$ , med  $r = M\delta$  och  $\delta$  så liten att  $S \subset R$ . Vi ser att för  $\vec{v} \in S$  gäller att

$$\|G(\vec{v}) - \vec{u}_0\| \leq \max_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{v}(t)) dt \right| \leq M\delta = r. \quad (5.48)$$

Alltså har vi att  $G : S \rightarrow S$ . Vidare gäller för  $\vec{v}, \vec{w} \in S$  att

$$\|G(\vec{v}) - G(\vec{w})\| \leq \max_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x (\vec{f}(t, \vec{v}(t)) - \vec{f}(t, \vec{w}(t))) dt \right| \leq \delta K \|\vec{v} - \vec{w}\|. \quad (5.49)$$

Om  $\delta$  även uppfyller  $\delta K < 1$  är  $G$  en kontraktion och Banachs fixpunktssats 5.2 garanterar en unik lösning  $\vec{u} \in S$  i intervallet  $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ . □

Under starkare antaganden, nämligen kontinuitet för alla  $x \in \mathbb{R}$  och global Lipschitz-kontinuitet i  $\vec{u}$ , visar vi även existens och entydighet för alla  $x \in \mathbb{R}$ . Resultatet håller naturligtvis även i specialfallet när  $n = 1$ .

**Sats 5.4 (Existens och entydighet av global lösning)** Vi studerar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{u}), \\ \vec{u}(x_0) = \vec{u}_0, \end{cases} \quad (5.50)$$

där  $\vec{u}(x), \vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$  för alla  $x \in \mathbb{R}$  och  $\vec{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Om  $\vec{f}$  är kontinuerlig i  $x$ -variabeln och globalt Lipschitzkontinuerlig i  $\vec{u}$ ,

$$\|\vec{f}(x, \vec{u}_1) - \vec{f}(x, \vec{u}_2)\| \leq K\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|, \quad \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^n, \quad (5.51)$$

existerar det en unik lösning  $\vec{u}(x)$  till begynnelsevärdesproblemet för alla  $x \in \mathbb{R}$ .

*Bevis.* ★ Beviset är likt beviset av sats 5.3 men innehåller några skillnader. Vi låter igen  $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  och bildar  $S = \{\vec{u} \in C(I)^n : \|\vec{u} - \vec{u}_0\| \leq r\}$  för något  $\delta > 0$  och  $r > 0$ . Fixpunktsiteration ger upphov till avbildningen

$$G(\vec{v}) := \vec{u}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{v}(t)) dt. \quad (5.52)$$

Vi vill välja  $\delta$  så att  $G : S \rightarrow S$  och att  $G$  är en kontraktion. Vi noterar att eftersom  $\vec{f}$  är kontinuerlig på  $I$  och därmed begränsad (av något tal  $M > 0$ ) i  $x$ -variabeln och (globalt) Lipschitzkontinuerlig i  $\vec{u}$ -variabeln gäller att för  $\vec{u} \in S$

$$\|\vec{f}(\vec{u})\| \leq \|\vec{f}(\vec{u}_0)\| + \|\vec{f}(\vec{u}) - \vec{f}(\vec{u}_0)\| \leq M + K\|\vec{u} - \vec{u}_0\| \leq M + Kr. \quad (5.53)$$

Vi får därför att

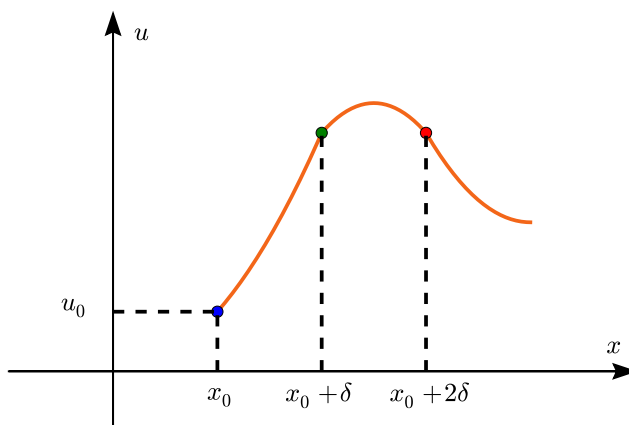
$$\|G(\vec{u}) - \vec{u}_0\| = \max_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{u}(t)) dt \right| \leq \max_{x \in I} |x - x_0| (M + Kr) \leq \delta(M + Kr). \quad (5.54)$$

Om  $G(\vec{u}) \in S$  måste därför  $\delta(M + Kr) \leq r$ . Vi låter  $\delta = \frac{1}{2K}$  och  $r = \frac{M}{K}$ . Med dessa val gäller att  $G : S \rightarrow S$ . Dessutom gäller att

$$\|G(\vec{v}) - G(\vec{w})\| \leq \max_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{v}(t)) dt - \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{w}(t)) dt \right| \leq \max_{t \in I} \delta K |\vec{v}(t) - \vec{w}(t)| = \frac{1}{2} \|\vec{v} - \vec{w}\|. \quad (5.55)$$

Banachs fixpunktssats ger att det finns en unik lösning  $\vec{u} \in S$  till begynnelsevärdesproblemet i intervallet  $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ . Eftersom  $\delta$  bara beror på  $K$  kan vi göra om samma argument med begynnelsevillkor i  $(x_0 + \delta, u(x_0 + \delta))$ . Samma resonemang ger då unik lösning i intervallet  $[x_0, x_0 + 2\delta]$ . Detta argument kan sedan upprepas till vi har existens av lösning för alla  $x \geq 0$ . För  $x < 0$  kan vi lösa baklänges på samma vis genom att göra transformationen  $\bar{x} = -x$ . □

Sista steget i beviset där vi går från lokal lösning i  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  till global lösning i hela  $\mathbb{R}$  är intressant. När Lipschitz-konstanten är global ser vi att  $\delta$  kan väljas oberoende av begynnelsevillkoret nämligen  $\delta = \frac{1}{2K}$ . Det innebär att vi kan börja om på  $x_0 + \delta$  med  $u(x_0 + \delta)$ , som vi vet existerar, som begynnelsevillkor. Detta ger existens och entydighet även i intervallet  $[x_0, x_0 + 2\delta]$  och så vidare. I figur 5.7 ser vi hur lösningarna fogas samman till en global lösning. I sats 5.3 antar vi bara att  $f$  är Lipschitz-kontinuerlig på en begränsad mängd  $R$  i  $u$ -variabeln (lokalt Lipschitz-kontinuerlig). Då skulle Lipschitz-konstanten kunna öka med storleken på  $R$  och därmed skulle intervallens längd kunna minska och till slut konvergera mot



Figur 5.7: En global lösning sammanfogas av lokala lösningar på delintervall.

ett ändligt värde. Det är precis det som händer i exemplet med ekvationen  $u' = u^2$  med begynnelsevillkor  $u(0) = 1$ . För det problemet existerar bara lösningen på intervallet  $[0, 1)$ .

Det gäller att linjära ODE med kontinuerliga koefficienter på formen 5.25 är ett specialfall av globalt Lipschitz-kontinuerliga högerled som omfattas av satsen. Sats 5.4 ger alltså existens och entydighet av lösning för linjära system av ODE för alla  $x \in \mathbb{R}$ . Eftersom högre ordningens ODE kan skrivas om som system av första ordningen är resultaten mycket användbara. Sats 5.4 kan till exempel även användas för att definiera elementära funktioner som  $e^x$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$  och mer exotiska funktioner. Vi studerar nu detta närmare.

## 5.5 Alternativ definition av $\exp(x)$ och $\ln(x)$

I och med att vi har visat att ett system av första ordningens ODE med högerled som är globalt Lipschitz-kontinuerligt har unik lösning kan vi presentera alternativa definitioner av de elementära funktionerna som lösningar till differentialekvationer. Om en elementär funktion löser ett system av ODE med Lipschitzkontinuerligt högerled kan vi använda detta som definitionen för funktionen. Sedan återstår att visa funktionernas egenskaper utifrån den nya definitionen. Eftersom de elementära funktionerna beskriver fysikaliska fenomen som populationstillväxt och svängningar visar det sig att de ofta löser enkla och fundamentala differentialekvationer. Vi börjar med  $\exp(x)$  och dess invers  $\ln(x)$ .

Ett sätt att definiera talet  $e$  är följande gränsvärde

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (5.56)$$

Logaritmen kan med hjälp av integralen definieras som

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} du. \quad (5.57)$$

Vi vill nu definiera exponentialfunktionen som lösning till en differentialekvation.

**Definition 5.11 (Alternativ definition av exponentialfunktionen)** Vi definierar  $u(x) = \exp(x)$  som den unika lösningen till ekvationen

$$u'(x) = u(x), \quad (5.58)$$

med begynnelsevillkor  $u(0) = 1$ .

Existens och entydighet följer direkt av sats 5.4 med  $f(x, u) = u$  eftersom  $f$  som funktion av  $u$  är globalt Lipschitz-kontinuerlig. Ekvationen som definierar exponentialfunktionen modellerar ett system där förändringen (derivatan) är proportionell mot populationens storlek.

Vi kan utgående från denna definition härleda exponentialfunktionens egenskaper och gränsvärdesdefinitionen av talet  $e = \exp(1)$ . Vi har direkt att exponentialfunktionen är sin egen derivata eftersom  $u'(x) = u(x)$  per definition. I följande exempel härleder vi två av exponentialfunktionens egenskaper.

**Exempel 5.9 (Exponentialfunktionen)** Bestäm vilken ekvationen  $\exp(kx)$  löser, där  $k \in \mathbb{R}$ . Vi deriverar  $\exp(kx)$  och får

$$(\exp(kx))' = k \exp(kx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad e^{k \cdot 0} = 1. \quad (5.59)$$

Alltså är  $u(x) := \exp(kx)$  den unika lösningen till ekvationen  $u'(x) = ku(x)$  med begynnelsevillkoret  $u(0) = 1$ .

**Exempel 5.10 (Produkt av exponentialfunktioner)** Låt  $u_1$  lösa  $u_1' = k_1 u_1$  med begynnelsevillkoret  $u_1(0) = 1$  och  $u_2$  lösa  $u_2' = k_2 u_2$  med begynnelsevillkor  $u_2(0) = 1$ . Per definition är alltså  $u_1(x) = \exp(k_1 x)$  och  $u_2(x) = \exp(k_2 x)$ . Då gäller att  $u_3 = u_1 u_2$  löser

$$u_3'(x) = u_1'(x)u_2(x) + u_1(x)u_2'(x) = (k_1 + k_2)u_1(x) \cdot u_2(x) = (k_1 + k_2)u_3(x), \quad (5.60)$$

med begynnelsevillkoret  $u_3(0) = u_1(0)u_2(0) = 1$ . Denna ekvation har enligt exempel 5.9 lösningen  $u_3(x) = \exp((k_1 + k_2)x)$ . Alltså har vi härlett egenskapen  $\exp(k_1 x) \exp(k_2 x) = \exp((k_1 + k_2)x)$  utifrån den nya definitionen.

Vi kan även härleda gränsvärdesdefinitionen för talet  $e$  genom att använda en numerisk metod, som vi återkommer till i kapitel 6, för att approximera lösningen.

**Exempel 5.11 (Härledning av talet  $e$ )** Vi utgår från begynnelsevärdesproblemet

$$u'(x) = u(x), \quad u(0) = u_0 = 1. \quad (5.61)$$

Vi vill beräkna en approximation till  $u(1)$  genom att dela in intervallet  $[0, 1]$  i  $n$  delintervall av längd  $\frac{1}{n}$ . För att hitta en approximativ lösning byter vi ut derivatan mot en differenskvot  $u'(x) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{1/n}$ , där  $u_i$  är approximationer till  $u(\frac{i}{n})$ . Högerledet i ekvationen,  $u(x)$ , approximeras av  $u_i$  på intervallet  $[x_i, x_{i+1}]$ , alltså

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{1/n} = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad u_0 = 1 \quad (5.62)$$

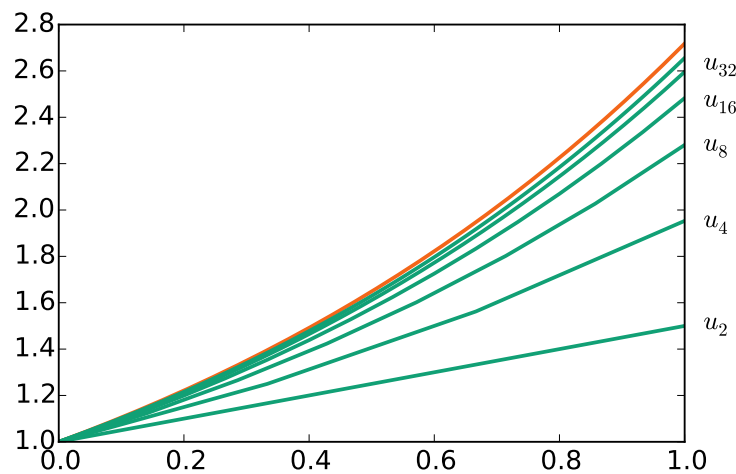
eller

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}u_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)u_{n-1} = \cdots = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n u_0 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (5.63)$$

Den numeriska metod vi använder här kallas Eulers metod. Vi visar i sats 6.1 att den beräknade lösningen konvergerar mot den exakta då  $n \rightarrow \infty$ . Därför gäller att

$$e = u(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

I figur 5.8 ser vi hur lösningarna konvergerar mot den exakta lösningen då antal delintervall  $n$  ökar  $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ .



Figur 5.8: Konvergens av numeriska approximationer av exponentialfunktionen för  $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ .

Vi har nu visat att definitionen av exponentialfunktionen som lösning till en ODE överensstämmer med konstruktionen av talet  $e$  och vi drar slutsatsen att  $\exp(x) = e^x$ .

I nästa exempel använder vi definitionen av exponentialfunktionen för att härleda definitionen av logaritmen.

**Exempel 5.12 (Logaritmen)** Vi vill definiera den naturliga logaritmen som inversen till exponentialfunktionen. Vi har  $u'(x) = u(x)$  samt  $u(0) = 1$  och vill bestämma  $v(u)$  så att  $x = v(u(x))$ . Vi deriverar uttrycket med avseende på  $x$  och använder kedjeregeln

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{dv(u(x))}{dx} = \frac{dv(u)}{du} \frac{du}{dx} = v'(u) \cdot u. \quad (5.64)$$

Alltså gäller  $v'(u) = \frac{1}{u}$  samt  $v(1) = v(u(0)) = 0$ . Integration från 1 till  $x$  ger

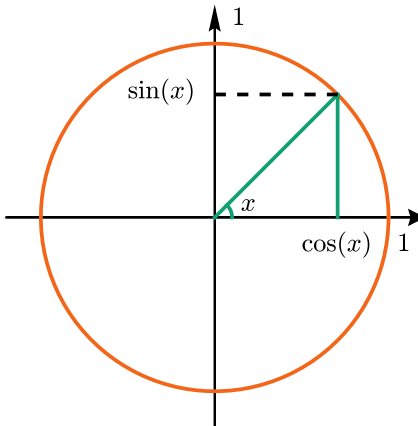
$$v(x) - v(1) = \int_1^x \frac{1}{u} du. \quad (5.65)$$

Inversen till exponentialfunktionen ges därmed av  $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} du$ .



## 5.6 Alternativ definition av $\cos(x)$ och $\sin(x)$

Vi går nu över till att definiera  $\cos$  och  $\sin$ . Traditionellt definieras  $\cos$  och  $\sin$  med hjälp av enhetscirkeln, som i figur 5.9. Varje punkt på cirkeln ges av koordinaterna  $(\cos(x), \sin(x))$ , där  $x$  är vinkeln mellan den horisontella axeln och den linje som passerar genom  $(\cos(x), \sin(x))$  och origo.



Figur 5.9: Definition av  $\cos(x)$  och  $\sin(x)$  som närliggande respektive motstående katet genom hypotenusan (lika med ett) i en rätvinklig triangel.

På samma sätt som för  $\exp(x)$  kan vi istället definiera  $\cos(x)$  och  $\sin(x)$  som lösningar till en differentialekvation.

**Definition 5.12 (Alternativ definition av cosinus)** Vi definierar  $u(x) = \cos(x)$  som den unika lösningen till ekvationen

$$u''(x) + u(x) = 0, \quad (5.66)$$

med begynnelsevillkor  $u(0) = 1$  och  $u'(0) = 0$ .

**Definition 5.13 (Alternativ definition av sinus)** Vi definierar  $z(x) = \sin(x)$  som den unika lösningen till ekvationen

$$z''(x) + z(x) = 0, \quad (5.67)$$

med begynnelsevillkor  $z(0) = 0$  och  $z'(0) = 1$ .

Unik lösning existerar till båda ekvationerna på grund av sats 5.4 eftersom vi kan skriva om ekvationerna som system av första ordningen med ett Lipschitzkontinuerligt högerled. Låt  $u_1 = u$  och  $u_2 = \frac{du}{dx}$ . Vi får,

$$\frac{d}{dx} \vec{u}(x) = \begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} = A\vec{u}. \quad (5.68)$$

Högerledet är linjärt i  $\vec{u}$ . Vi har att

$$|A\vec{v} - A\vec{w}| = \left| \begin{bmatrix} v_2 - w_2 \\ w_1 - v_1 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(v_2 - w_2)^2 + (v_1 - w_1)^2} = |\vec{v} - \vec{w}|. \quad (5.69)$$

Alltså är högerledet (globalt) Lipschitz-kontinuerligt med konstant  $L = 1$ . Sats 5.4 ger existens och entydighet av lösning för alla  $x \in \mathbb{R}$ . Utifrån den alternativa definitionen av  $\cos(x)$  och  $\sin(x)$  kan vi härleda alla trigonometriska räkneregler.

**Exempel 5.13 (Deriveringsregel)** För att visa att  $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$  gör vi följande kalkyl. Låt  $z(x) = \sin(x)$  enligt Definition 5.13. Vi deriverar ekvationen och får

$$z'''(x) + z'(x) = 0, \quad z'(0) = 1, \quad z''(0) = -z(0) = 0. \quad (5.70)$$

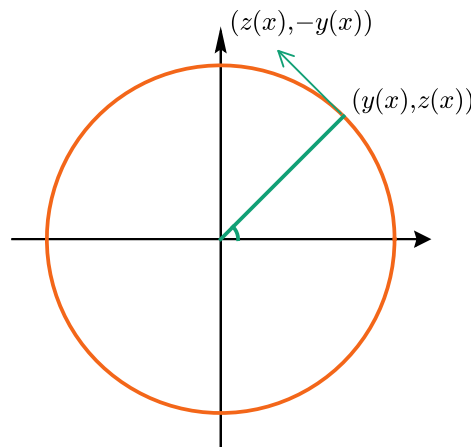
Men eftersom  $z'(x)$  är unik lösning till samma ekvationen som  $u(x) = \cos(x)$ , enligt definition 5.12, och med samma begynnelsevillkor gäller  $z'(x) = u(x) = \cos(x)$ .

**Exempel 5.14 (Trigonometriska ettan)** För att härleda trigonometriska ettan noterar vi att med  $u(x) = \cos(x)$  och  $z(x) = \sin(x)$  enligt definitionerna ovan gäller

$$\frac{d}{dx}(u(x)^2 + z(x)^2) = 2u(x)u'(x) + 2z(x)z'(x) = 2u(x)(z''(x) + z(x)) = 0. \quad (5.71)$$

Alltså är  $u(x)^2 + z(x)^2 = C$  för någon konstant  $C$ . Men vi har  $u(0)^2 + z(0)^2 = 1 = C$  alltså  $u(x)^2 + z(x)^2 = 1$  det vill säga  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .

För att visa att vår nya definition överensstämmer med den traditionella definitionen av  $\sin(x)$  med enhetscirkeln låter vi  $x$  parametrisera kurvan  $C = (u(x), z(x)) = (u(x), -u'(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . På grund av trigonometriska ettan som vi just härlett ligger alla punkter i  $C$  på enhetscirkeln, se figur 5.10, och punkten  $(u(x), -u'(x))$  rör sig kontinuerligt längs kurvan. Hastigheten som punkten  $(u(x), -u'(x))$  rör sig med



Figur 5.10: Parametrisering av kurvan  $C = (u(x), -u'(x))$ .

runt enhetscirkeln ges direkt av derivatan av positionen

$$\frac{d}{dx}(u(x), -u'(x)) = (u'(x), -u''(x)) = (u'(x), u(x)) = (-z(x), u(x)). \quad (5.72)$$

Hastighetens riktning är vinkelrät mot linjen som går genom  $(u(x), z(x))$  och origo. Det följer av att skalärprodukten mellan dem är noll

$$(u(x), z(x)) \cdot (-z(x), u(x)) = u(x)z(x) - z(x)u(x) = 0. \quad (5.73)$$

Farten (som är beloppet av hastigheten) är konstant lika med 1 eftersom

$$\sqrt{(-u')^2 + (u')^2} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.74)$$

Punkten  $(u(x), z(x))$  rör sig med konstant fart 1 längs enhetscirkeln moturs eftersom begynnelsehastigheten är  $(0, 1)$ . På ett varv går alltså  $x$  från 0 till  $2\pi$  eftersom enhetscirkelns omkrets är  $2\pi$ ,  $u(x) = u(x + 2\pi \cdot n)$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ . Detta innebär att  $u(x)$  överensstämmer med den traditionella definitionen och  $u(x) = \cos(x)$ .

Vi kan även härleda övriga trigonometriska räkneregler. I nästa exempel visar vi att  $\sin(x + w) = \sin(x)\cos(w) + \cos(x)\sin(w)$  och motsvarande resultat för cosinus.

**Exempel 5.15 (Summan av vinklar i argumentet)** Vi låter  $z(x)$  lösa ekvationen

$$z''(x) + z(x) = 0, \quad z(0) = \alpha, \quad z'(0) = \beta. \quad (5.75)$$

Vi ser att  $z(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$  eftersom det är en linjärkombination av lösningar till den homogena ekvationen samt att begynnelsevillkoren är uppfyllda. Vi låter nu  $\alpha = \sin(w)$  och  $\beta = \cos(w)$ . Detta motsvarar en punkt på enhetscirkeln med vinkeln  $w$ , se figur 5.11.

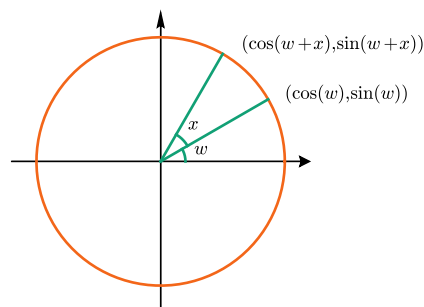
Definitionen av sinus ger att  $z(x) = \sin(x + w)$  löser ekvationen

$$z''(x) + z(x) = 0, \quad z(0) = \sin(w), \quad z'(0) = \sin'(w) = \cos(w). \quad (5.76)$$

Men eftersom lösningarna är unika gäller

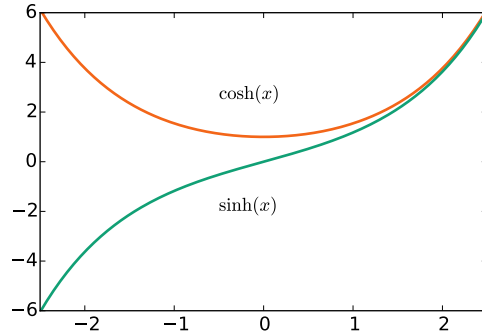
$$\sin(x + w) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = \sin(w) \cos(x) + \cos(w) \sin(x).$$

Genom derivering får vi också att  $\cos(x + z) = \frac{d}{dx} \sin(x + z) = \frac{d}{dx} \sin(w) \cos(x) + \cos(w) \sin(x) = \cos(w) \cos(x) - \sin(w) \sin(x)$ . Dessutom följer direkt att  $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$  och  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ .



Figur 5.11: Funktionerna  $\cos(x + w)$  och  $\sin(x + w)$  illustrerade med hjälp av enhetscirkeln.

Andra elementära funktioner löser också differentialekvationer som är vanligt förekommande i modellering av fysikaliska förlopp. I figur 5.12 ser vi funktionerna  $\sinh$  och  $\cosh$ . De kan även uttryckas med



Figur 5.12: Funktionerna  $\cosh(x)$  och  $\sinh(x)$ .

hjälp av exponentialfunktionen som

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (5.77)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (5.78)$$

De löser också andra ordningens ODE. Vi har att  $u(x) = \cosh(x)$  löser

$$u''(x) - u(x) = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad (5.79)$$

och  $z(x) = \sinh(x)$  löser

$$z''(x) - z(x) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1. \quad (5.80)$$

Funktionen  $\cosh(x)$  beskriver en kedja som hänger fritt mellan två punkter under inverkan av gravitation.

## Övningar

### 5.1 Linjär algebra

**Övning 5.1** Givet vektorerna  $\vec{v} = [2 \ 1 \ -2]$  och  $\vec{w} = [0 \ 3 \ -1]$  beräkna vektorerna.

(a)  $\vec{v} + \vec{w}$  (b)  $3\vec{v} - \vec{w}$  (c)  $3\vec{w}$  (d)  $\vec{v} - 2\vec{w}$

**Övning 5.2** Beräkna längden av vektorerna.

(a)  $[2 \ 1 \ 1.5]$  (b)  $[2 \ 1]$  (c)  $[-2 \ -2 \ -2 \ -2]$  (d)  $[1 \ 1 \ \dots \ 1] \in \mathbb{R}^n$

**Övning 5.3** Beräkna skalärprodukterna.

(a)  $[3 \ -1 \ 4] \cdot [0 \ 1 \ -1]$  (b)  $[2 \ 5] \cdot [1 \ 0]$  (c)  $[1 \ 1 \ 1] \cdot [0 \ 0 \ -1]$   
 (d)  $[1 \ 2 \ 3 \ 4] \cdot [1 \ 2 \ 3 \ 4]$

**Övning 5.4** Beräkna vinklarna mellan vektorerna.

(a)  $[\sqrt{3} \ 0 \ 0]$  och  $[3 \ \sqrt{3} \ 0]$  (b)  $[1 \ 1 \ 1]$  och  $[1 \ -2 \ -1]$  (c)  $[1 \ 0]$   
 och  $[1 \ \sqrt{3}]$  (d)  $[1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^n$  och  $[1 \ 1 \ \dots \ 1] \in \mathbb{R}^n$ .

**Övning 5.5** Lös ekvationssystemen.

(a)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ + 2y + z = 7 \\ - y + z = 1 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ y + z = 2 \\ - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

**Övning 5.6** Skriv övning 5.5 på matrisform,  $Ax = b$ .

**Övning 5.7** Beräkna produkten av  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  och vektorerna.

$$(a) \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (b) \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c) \vec{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (d) \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 5.2 System av första ordningen

**Övning 5.8** Bestäm lösningen till  $\frac{d}{dt}\vec{u} = A\vec{u}$ , med begynnelsevillkor  $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$  genom att skriva om systemet till en andra ordningens ODE.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (b) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (d) A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Övning 5.9** Skriv om systemet  $\frac{d}{dt}\vec{u} = \vec{f}(t, \vec{u})$  till en andra ordningens ODE i variabeln  $u(t) = u_1(t)$ .

$$(a) \vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ tu_1(t)^2 \end{bmatrix} \quad (b) \vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ \sin(u_1(t)) \end{bmatrix}$$

$$(c) \vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{bmatrix} u_2(t)^2 \\ u_1(t) \end{bmatrix} \quad (d) \vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{bmatrix} u_1(t) + u_2(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix}$$

**Övning 5.10** Bestäm lösningen till  $\frac{d}{dt}\vec{u} = \vec{f}(t, \vec{u})$ , med begynnelsevillkor  $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$  genom att skriva om systemet till en andra ordningens ODE.

$$(a) \vec{f} = \begin{bmatrix} -v \\ -v^2 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (b) \vec{f} = \begin{bmatrix} t \\ u^2 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \vec{f} = \begin{bmatrix} tu^2 \\ u \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (d) \vec{f} = \begin{bmatrix} u \\ v + u^2 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Övning 5.11** Bestäm lösningen till  $\frac{d}{dt}\vec{u} + A\vec{u} = \vec{b}(t)$ , med begynnelsevillkor  $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ , genom att skriva om systemet som en andra ordningens ODE.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad \text{och } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \text{och } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{och } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} -k \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Övning 5.12** Skriv följande system som en tredje ordningens ODE.

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

### 5.3 Högre ordningens ODE som system av första ordningen

**Övning 5.13** Skriv följande andra ordningens ODE som ett system av två första ordningens ODE.

(a)

$$u'' - 2u' - 3u = x, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Skriv systemet på matrisform. Bestäm lösningen.

**Övning 5.14** Skriv följande andra ordningens ODE som ett system av två första ordningens ODE,

$$u'' + \sin(u) = x \cos(x), \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1.$$

**Övning 5.15** Skriv följande differentialekvation  $u'''(x) + x \sin(u'(x)) = x$ ,  $u(0) = 1$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 1$  som ett system av första ordningen.

**Övning 5.16** Skriv följande ODE som ett system av första ordningen,

$$u''(x) - 8u'(x) + 3u(x) = xe^x, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 3.$$

**Övning 5.17** Skriv följande ODE som ett system av första ordningen,

$$u^{(4)}(x) - 2u''(x) + 3u'(x) + xu(x) = e^{2x} + \cos(x),$$

med begynnelsevillkor  $u(0) = 2$ ,  $u'(0) = 3$ ,  $u''(0) = 1$ ,  $u^{(3)}(0) = 2$ .

**Övning 5.18** Skriv följande ODE som ett system av första ordningen,

$$u''(x) + u^2 u'(x) = e^x, \quad u(0) = -1, \quad u'(0) = 2.$$

### 5.4 Existens och entydighet av lösning

**Övning 5.19** Bestäm en Lipschitzkonstant för  $\vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{bmatrix} -v \\ 4u \end{bmatrix}$  med avseende på  $\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ .  
Har systemet  $\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \vec{f}(t, \vec{u})$ , med begynnelsevillkor  $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ , entydig lösning för alla  $t$ ?

**Övning 5.20** Är  $\vec{f}(t, \vec{v}) = \begin{bmatrix} v \\ v^2 \end{bmatrix}$  Lipschitzkontinuerligt för alla  $\vec{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ?

**Övning 5.21** Ekvationen  $u'(x) = 4u^{3/4}(x)$  med begynnelsevillkor  $u(0) = 0$  har åtminstone två lösningar  $u = 0$  och  $u = x^4$ . Vad i sats 5.3 är inte uppfyllt (eftersom lösningen inte är unik)?

### 5.5 Alternativ definition av elementära funktioner

**Övning 5.22** Låt exponentialfunktionen  $y(x) = \exp(x)$  vara definierad som lösning till ekvationen  $y'(x) = y(x)$ , med begynnelsevillkoret  $y(0) = 1$ . Visa utifrån denna definition att  $u(x) = y(x)^2$  löser ekvationen  $u'(x) = 2u(x)$ , där  $u(0) = 1$ .

**Övning 5.23** Härled logaritmlagen  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ ,  $x, y > 0$  utifrån relationen  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ .

**Övning 5.24** Härled logaritmlagen  $\ln(x^p) = p\ln(x)$ ,  $x, p > 0$ , utifrån relationen  $\exp(xy) = \exp(x)^y$ .

**Övning 5.25** Visa att  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  och  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  löser ekvationen  $u''(x) - u(x) = 0$ .

## Problem

### 5.1 Linjär algebra

**Problem 5.1** Givet två vektorer  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$  med mellanliggande vinkel  $\theta$ , visa att  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \cos(\theta)|\vec{v}||\vec{w}|$  med hjälp av cosinussatsen  $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\theta)$ .

**Problem 5.2** Låt  $A$  vara en  $2 \times 2$  matris med koefficienter  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ . Formulera ett antagande på koefficienterna så att det linjära systemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  har unik lösning för alla högerled  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ .

### 5.2 System av första ordningen

**Problem 5.3** Låt  $A$  vara en två gånger två matris sådan att  $\vec{v}^T A \vec{v} < 0$  för att  $0 \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ . Visa att lösningen  $\vec{u}(t) \in \mathbb{R}^2$  till ekvationen  $\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = A\vec{u}(t)$  med begynnelsevillkor  $\vec{u}(0) = \vec{u}_0 \in \mathbb{R}^2$  uppfyller olikheten  $|\vec{u}(t)| \leq |\vec{u}_0|$  för alla  $t \geq 0$ . *Tips: Multiplicera ekvationen med  $\vec{u}^T$  från vänster och utnyttja att  $u_i u'_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(u_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ .*

**Problem 5.4** Låt  $a = b = c = d = 1$  i exempel 5.7. Avgör om högerledet i ODE'n är Lipschitz-kontinuerligt för alla  $0 \leq x, y \leq 10$ . Beräkna jämviktspunkterna då  $x' = y' = 0$ .

### 5.3 Högre ordningens ODE som system av första ordningen



**Problem 5.5** Låt fjädrarna i exempel 5.8 ha olika fjäderkonstanter  $k_1$ ,  $k_2$  och  $k_3$ . Låt även massorna vara olika och ges av  $m_1$  och  $m_2$ . Härled motsvarande system av första ordningens ODE.

**Problem 5.6** Låt tre planeter med massor  $m_1$ ,  $m_2$  och  $m_3$  befinna sig i positionerna  $\vec{x}_1(0), \vec{x}_2(0), \vec{x}_3(0) \in \mathbb{R}^3$  med begynnelsehastighet  $\frac{d}{dt}\vec{x}_1(0), \frac{d}{dt}\vec{x}_2(0), \frac{d}{dt}\vec{x}_3(0)$  vid tiden  $t = 0$ . Gravitationskraften från planet  $j$  verkande på planet  $i$  ges av formeln  $F_{ij} = -\frac{Gm_i m_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3}$ . Newtons andra lag relaterar planeternas acceleration  $\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_1(t), \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_2(t), \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_3(t)$  genom relationen  $m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_i(t) = \sum_{j \neq i} F_{ij}$ . Sätt upp ett system av tre andra ordningens ODE som beskriver planeternas rörelse och skriv om systemet till första ordningen.

#### 5.4 Existens och entydighet av lösning

**Problem 5.7** Visa att ekvationen  $u''(t) - 4u(t) = 0$ , med begynnelsevillkor  $u(0) = 1$  och  $u'(0) = 1$ , har en unik lösning genom att skriva om ekvationen som ett system av första ordningens ODE och visa att högerledet är globalt Lipschitz-kontinuerligt.

#### 5.5 Alternativ definition av elementära funktioner

**Problem 5.8** Studera ekvationen  $u'(x) = u(x)$ ,  $u(0) = 1$  som definierar exponentialfunktionen. Härled formeln  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  genom att använda följande approximation till  $\frac{u_{i+1} - u_i}{1/n} = u_{i+1}$  i exempel 5.11.

**Problem 5.9** Vilken trigonometrisk funktion kan definieras av följande ODE,

$$u'(x) = 1 + u(x)^2, \quad u(0) = 0?$$

Är högerledet Lipschitz-kontinuerligt för alla  $u$ ? Har vi existens av unik lösning för alla  $x$ ?

**Problem 5.10** Låt  $u(x)$  lösa  $u''(x) - u(x) = 0$  med begynnelsevillkor  $u(0) = 1$  och  $u'(0) = 0$ . Visa att  $u(x)^2 + u'(x)^2 = 1$  för alla  $x$ .

## 6. Numerisk lösning av ODE

6.1	Numeriska metoder	116
6.2	Konvergens	119
6.3	Stabilitet	121
6.4	Algoritmer	123
6.5	Generalisering till system av ODE	126
6.6	Randvärdesproblem	128

Vi har presenterat flera analytiska metoder för att lösa ordinära differentialekvationer. För en stor mängd realistiska problem räcker inte de analytiska teknikerna till. Numeriska metoder för att lösa ODE är ett generellt verktyg för att beräkna approximativa lösningar. Vi presenterar tre numeriska metoder för att lösa ODE i detta kapitel. Metoderna har olika för- och nackdelar och därmed olika användningsområden. Vi studerar metodernas konvergens och stabilitet. Sedan generaliserar vi resultaten till system av ODE och diskuterar slutligen numerisk lösning av randvärdesproblem.

### 6.1 Numeriska metoder

Låt  $u(t)$  vara lösning till den ordinära differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)), & t_0 < t \leq T, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Notationen  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$  är en mer kompakt och används endast för tidsderivata. Vi vill beräkna en numerisk approximation till  $u(t)$ , på tidsintervallet  $t \in [t_0, T]$ , där  $T$  är sluttiden. Vi börjar med att dela upp tidsintervallet  $[t_0, T]$  i en partition av  $n$  delintervall  $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = T$  med  $k_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , som steglängd. Idén med att dela upp intervallet i en partition känner vi igen från numerisk integration och Riemann-summor. I de numeriska metoder vi studerar approximeras tidsderivatan  $\dot{u}$  på intervallet  $[t_{i-1}, t_i]$  alltid med differenskvoten  $\dot{u} \approx \frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{k_i}$ . Evalueringen av högerledet  $f(t, u)$  kommer däremot göras på olika sätt. Detta ger de numeriska metoderna olika egenskaper och därmed olika användningsområden.

Eulers metod approximerar  $f(t, u(t))$  på intervallet  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  med värdet i den vänstra punkten  $f(t_{i-1}, u(t_{i-1}))$ .

**Definition 6.1 (Eulers metod)** Låt  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  vara en partition av intervallet  $[t_0, T]$  i  $n$  delintervall av längd  $k_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Eulers metod för att beräkna en

approximation  $u_n$  av lösningen  $u(t_n)$  till ekvation (6.1) ges av

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f(t_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.2)$$

En god egenskap som Eulers metod har är att nästkommande värde  $u_i$  kan beräknas direkt genom insättning av föregående värde  $u_{i-1}$  i formeln  $u_{i-1} + k_i f(t_{i-1}, u_{i-1})$  utan att en algebraisk ekvation behöver lösas. Vi säger, på grund av detta, att Eulers metod är en explicit metod.

**Exempel 6.1 (Eulers metod)** Låt  $u(t)$  vara lösning till

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \cos(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (6.3)$$

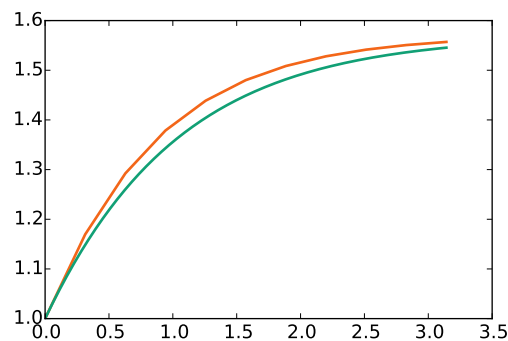
Använd Eulers metod för att beräkna en approximation till lösningen  $u(\pi)$  med konstant steglängd  $k = \pi/10$ . Vi noterar först att högerledet är Lipschitz-kontinuerligt eftersom

$$|\cos(z) - \cos(u)| \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\sin(x)| |z - u| \leq |z - u|, \quad (6.4)$$

där vi använder att Lipschitz-konstanten är begränsad av derivatans ( $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$ ) maximala värde till absolutbelopp, det vill säga att Lipschitz-konstanten är lika med normen av derivatan. Picards sats ger därmed att det finns en unik lösning  $u(t)$  definierad för alla  $t \geq 0$ . Vi låter  $t_i = ik = i\pi/10, i = 0, \dots, 10$ . I Eulers metod ges nästkommande värde av

$$u_i = u_{i-1} + k \cos(u_{i-1}). \quad (6.5)$$

Vi jämför Euler-approximationen med referenslösning beräknad på ett mycket finare nät. Felet mellan Euler-approximationen med tio delintervall och referenslösningen vid sluttiden är 0.011574855438. I figur 6.1 ser vi hur väl den numeriska lösningen med Eulers metod (orange) approximerar den exakta lösningen (grön).



Figur 6.1: Approximationen till  $u(t)$  uträknad med Eulers metod (orange) med 10 delintervall tillsammans med den exakta lösningen (grön).

Bakåt Euler är snarlik Eulers metod i formuleringen. Istället för att evaluera högerledet i  $f(t_{i-1}, u_{i-1})$  använder vi den högra ändpunkten  $f(t_i, u_i)$ .

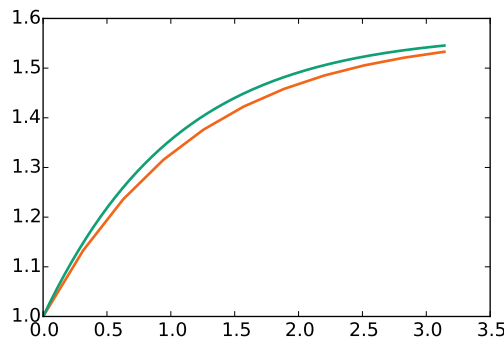
**Definition 6.2 (Bakåt Euler)** Låt  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  vara en partition av intervallet  $[t_0, T]$  i  $n$  delintervall av längd  $k_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Bakåt Euler-metoden för att beräkna en approximation  $u_n$  av lösningen  $u(t_n)$  till ekvation (6.1) ges av

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f(t_i, u_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.6)$$

**Exempel 6.2 (Bakåt Euler)** Vi använder samma exempel som för Eulers metod för att kunna jämföra approximationerna. Med bakåt Euler och  $t_i = ik = i\pi/10$ ,  $i = 0, \dots, 10$ , får vi

$$u_i = u_{i-1} + k \cos(u_i). \quad (6.7)$$

Vi behöver lösa en algebraisk ekvation på formen  $x = g(x) := u_{i-1} + k \cos(x)$  givet  $u_{i-1}$  och  $k$ . Vi ser direkt att  $|g'(x)| \leq k$  för alla  $x \in \mathbb{R}$  vilket innebär att fixpunktsiteration kommer konvergera om  $k < 1$ . Vi startar iterationen med  $x = u_{i-1}$ . Vi jämför även bakåt Euler-approximationen med en referenslösning. Felet mellan bakåt Euler-approximationen med tio delintervall och den exakta lösningen i sluttiden är 0.0124759125631, alltså av samma storleksordning som Eulers metod. I figur 6.2 ser vi den exakta lösningen (grön) tillsammans med bakåt Euler-approximationen (orange).



Figur 6.2: Approximationen av  $u(t)$  uträknad med bakåt Euler (orange) med 10 delintervall tillsammans med referenslösningen (grön).

Som vi ser i exemplet kräver bakåt Euler att en algebraisk ekvation löses i varje tidssteg för att beräkna nästa värde  $u_i$ . Metoden är därför inte explicit, som Eulers metod, utan implicit. I Eulers metod ges nästa värde explicit genom insättning av föregående medan i bakåt Euler ges den implicit genom ekvationslösning. Bakåt Euler går även under namnet implicit Euler.

Mittpunktsmetoden evaluerar, som namnet antyder, högerledet i mittpunkten på intervallet, det vill säga  $f(\frac{t_i+t_{i-1}}{2}, \frac{u_i+u_{i-1}}{2})$ . Detta innebär att mittpunktsmetoden är implicit precis som bakåt Euler, eftersom den okända  $u_i$  ingår i högerledet.

**Definition 6.3 (Mittpunktsmetoden)** Låt  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  vara en partition av intervallet  $[t_0, T]$  i  $n$  delintervall av längd  $k_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Mittpunktsmetoden för

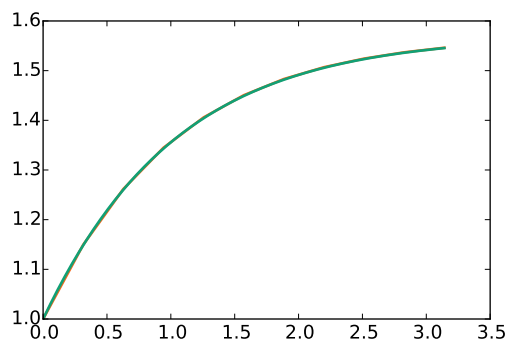
att beräkna en approximation  $u_n$  av lösningen  $u(t_n)$  till ekvation (6.1) ges av

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}, \frac{u_i + u_{i-1}}{2}\right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.8)$$

**Exempel 6.3 (Mittpunktsmetoden)** Vi fortsätter med samma exempel. Mittpunktsmetoden ges av

$$u_i = u_{i-1} + k \cos\left(\frac{u_{i-1} + u_i}{2}\right). \quad (6.9)$$

Även här behöver vi lösa en algebraisk ekvation på formen  $x = g(x) := u_{i-1} + k \cos\left(\frac{u_{i-1} + x}{2}\right)$  givet  $u_{i-1}$  och  $k$ . Vi ser att  $|g'(x)| \leq \frac{k}{2}$  för alla  $x \in \mathbb{R}$  vilket innebär att fixpunktsiteration kommer konvergera för  $k < 2$ . Som startgissning kan vi använda  $u_{i-1}$ . I figur 6.3 jämförs mittpunktsmetoden (orange) med referenslösningen (grön). Felet är nu bara 0.000639866293157 i sluttiden, vilket är ungefär 20 gånger mindre än för de andra metoderna. Det är svårt att se skillnad på approximationen och den exakta lösningen i figuren.



Figur 6.3: Approximationen till  $u(t)$  uträknad med mittpunktsmetoden (orange) med 10 delintervall och referenslösningen (grön). Kurvorna går nästan helt i varandra.

Felet i approximationen avtar snabbare när antal intervall ökas för mittpunktsmetoden i jämförelse med både Eulers metod och bakåt Euler. Vi ska nu studera konvergensen mer i detalj.

## 6.2 Konvergens

Vi har redan sett att felet i mittpunktsmetodens approximation var betydligt mindre än motsvarande fel för Eulers metod och bakåt Euler i exemplen med ekvationen  $\dot{u} = \cos(u)$ . Begreppet konvergensordning används för att beskriva noggrannheten i en numerisk metod.

**Definition 6.4 (Konvergensordning)** En numerisk metod för att lösa ett begynnelsevärdesproblem med konstant steglängd  $k$  är av ordning  $n$  om felet vid sluttiden är proportionellt mot  $k^n$ .

Vi formulerar satsen om konvergens för Eulers metod. Beviset bygger på Taylorutveckling av den exakta lösningen i varje tidssteg.

**Sats 6.1 (Konvergens av Eulers metod)** Låt  $u(t)$  lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0, \quad (6.10)$$

där den kontinuerliga funktionen  $f(t, u)$  är globalt Lipschitz-kontinuerlig i  $u$  med Lipschitzkonstant  $L$  och lösningen uppfyller  $\max_{t \in [t_0, T]} \left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right| \leq M$ . Låt vidare  $u_n$  vara Eulerapproximationen av  $u(t_n)$  med konstant steglängd  $k$ , där  $t_n = nk$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Då gäller

$$|u(t_n) - u_n| \leq \frac{Mk}{2L} \left( e^{L(t_n - t_0)} - 1 \right). \quad (6.11)$$

*Bevis.* Vi studerar först felet  $e_i = u(t_i) - u_i$  på intervallet  $[t_{i-1}, t_i]$ . Taylors formel kring punkten  $u(t_{i-1})$  ger

$$u(t_i) = u(t_{i-1}) + ku'(t_{i-1}) + \frac{k^2}{2}u''(\eta_i), \quad (6.12)$$

för något  $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Av ekvationen  $u'(t) = f(t, u(t))$  följer att

$$u(t_i) = u(t_{i-1}) + kf(t_{i-1}, u(t_{i-1})) + \frac{k^2}{2}u''(\eta_i). \quad (6.13)$$

Eulers metod ger att  $u_i = u_{i-1} + kf(t_{i-1}, u_{i-1})$ . Vi får

$$e_i = e_{i-1} + k(f(t_{i-1}, u(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, u_{i-1})) + \frac{k^2}{2}u''(\eta_i). \quad (6.14)$$

och eftersom  $f$  är Lipschitz-kontinuerlig i  $u$  med konstant  $L$  och andra derivatan av  $u$  är begränsad av  $M$  får vi

$$|e_i| \leq |e_{i-1}| + kL|e_{i-1}| + \frac{k^2M}{2} = (1 + kL)|e_{i-1}| + \frac{k^2M}{2}. \quad (6.15)$$

Om vi upprepar denna räkning från  $i = n$  ner till  $i = 1$  får vi för det globala felet efter  $n$  steg

$$|e_n| \leq (1 + kL)|e_{n-1}| + \frac{k^2M}{2} \quad (6.16)$$

$$\leq (1 + kL)^2|e_{n-2}| + (1 + kL)\frac{k^2M}{2} + \frac{k^2M}{2} \quad (6.17)$$

$$\leq (1 + kL)^n|e_0| + \frac{k^2M}{2}(1 + (1 + kL) + (1 + kL)^2 + \dots + (1 + kL)^{n-1}) \quad (6.18)$$

$$= \frac{k^2M}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + kL)^i, \quad (6.19)$$

eftersom  $|e_0| = |u(t_0) - u_0| = 0$ . Summationsformeln för geometrisk summa ger

$$|u(t_n) - u_n| = |e_n| \leq \frac{k^2M}{2} \frac{(1 + kL)^n - 1}{kL} \leq \frac{Mk}{2L} (e^{nkL} - 1) = \frac{Mk}{2L} (e^{(t_n - t_0)L} - 1), \quad (6.20)$$

där vi använder att  $1 + x \leq e^x$ , med  $x = kL$ . Detta följer eftersom vi har likhet för  $x = 0$  och högerledet har derivata strikt större än ett för  $x > 0$ .  $\square$

Bakåt Euler är också en första ordningens metod medan mittpunktsmetoden är av andra ordningen. Beviset för bakåt Euler är snarlikt det för Eulers metod och lämnas som övning. För mittpunktsmetoden används Taylors formel både för  $u(t_i)$  och  $u_{t_{i-1}}$  kring mittpunkten till och med tredjederivator, vilket leder till cancellation av andraderivatorna. I övrigt är idén densamma.

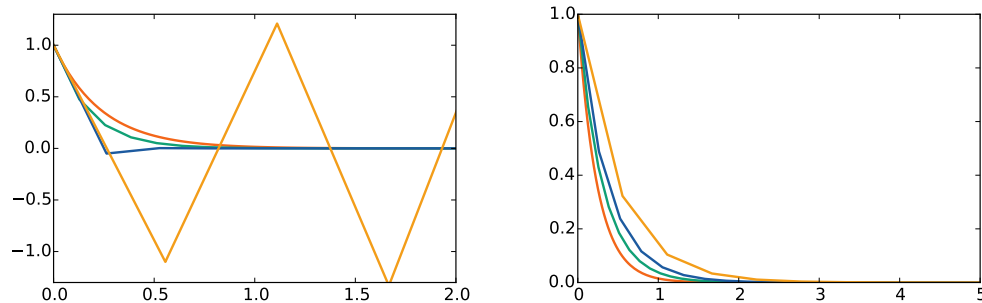
### 6.3 Stabilitet

Om vi använder Eulers metod för att lösa en ODE vars lösning varierar snabbt, uppträder ett fenomen som kallas instabilitet. Vi illustrerar det med ett exempel.

**Exempel 6.4 (Stabilitet)** Låt  $u(t)$  lösa

$$u'(t) = -4.2u(t), \quad u(0) = 1. \quad (6.21)$$

Den analytiska lösningen ges av  $u(t) = e^{-4.2t}$ . Vi beräknar lösningen fram till  $T = 5$  med Eulers metod. I figur 6.4 (vänster) är den röda linjen den analytiska lösningen, grön motsvarar steglängden  $k = 5/40$ , blå  $k = 5/20$  och orange  $k = 5/10$ . För  $k = 5/10$  beter sig den numeriska approximationen märkligt. Lösningen börjar oscillera och växa trots att den analytiska lösningen avtar. Motsvarande fenomen finns inte för bakåt Euler, som synes i figur 6.4 (höger). Vi säger att bakåt Euler är stabil för detta problem medan Eulers metod med steglängd  $k = 5/10$  är instabil.



Figur 6.4: Eulers metod (vänster) och bakåt Euler (höger) med steglängd  $k = 5/10, 5/20, 5/40$ . Vi ser att Eulers metod med steglängd  $k = 5/10$  ger en instabil, växande, lösning medan bakåt Euler är stabil för alla  $k$ .

Exemplet visar på en svaghet med feluppskattningen i sats 6.1, som är applicerbar på detta problem. Nämligen att faktorn  $e^{L(t_n-t_0)}$  i uppskattningen kan bli väldigt stor vilket innebär att skattningen inte säger så mycket för stora värden på  $T$ . Denna term uppstår eftersom vi i varje iteration multiplicerar felet från föregående tidssteg med faktorn  $1 + kL$ , där  $L$  är högerledets ( $f$ 's) Lipschitz-konstant med avseende på  $u$ . Om vi går tillbaka till ekvation (6.14) i beviset, som beskriver hur felet i tidssteg  $i$  beror av felet i tidssteg  $i - 1$ , har vi för problemet i exemplet med  $f(t, u) = -4.2u$  att,

$$e_i = e_{i-1} + k(f(t_{i-1}, u(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, u_{i-1})) + \frac{k^2}{2}u''(\eta_i) = (1 - 4.2k)e_{i-1} + \frac{k^2}{2}u''(\eta_i). \quad (6.22)$$

Om faktorn  $|1 - 4.2k| > 1$  ser vi att vi riskerar att få en exponentiell tillväxt i felet. Det är precis den effekten vi ser i figur 6.4 (vänster) då  $k = 5/10$  vilket innebär att  $|1 - 4.2 \cdot 5/10| = 1.1 > 1$ .

Det finns en teori för att avgöra när en numerisk metod är stabil. Vi använder en testekvation på formen

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad (6.23)$$

där  $\lambda \in \mathbb{C}$ , som tillåts vara komplex. Lösningen är då  $u(t) = e^{\lambda t}$  som avtar exponentiellt om realdelen av  $\lambda$  är mindre än noll och växer exponentiellt om realdelen av  $\lambda$  är större än noll. Vi definierar stabilitetsområdet för en numerisk metod på följande sätt.

**Definition 6.5 (Stabilitet av numerisk metod)** Låt  $u_n$  vara en approximation till testekvationen  $u'(t) = \lambda u(t)$  som definieras av relationen  $u_i = g(k\lambda)u_{i-1}$ , där  $k$  är metodens konstanta steglängd och  $i = 1, \dots, n$ . Då säger vi att metodens stabilitetsområde ges av alla  $k\lambda$  sådana att  $|g(k\lambda)| < 1$ .

Vi noterar till exempel att  $g(k\lambda) = 1 + k\lambda$  för Eulers metod. Givet denna definition kan vi härleda stabilitetsområdet för våra tre numeriska metoder.

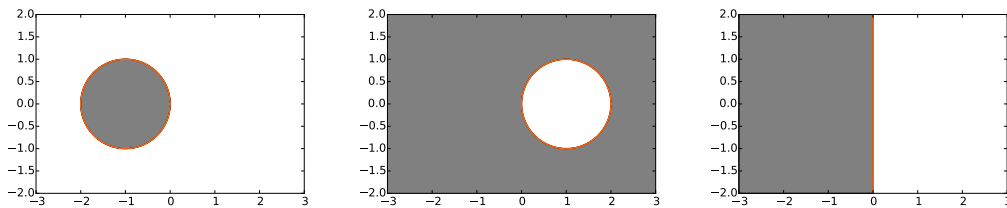
**Sats 6.2 (Stabilitetsområden)** Stabilitetsområdet för Eulers metod ges av  $|1 + k\lambda| < 1$ , för implicit Euler  $|1 - k\lambda| > 1$  och för mittpunktsmetoden  $|\frac{1+k\lambda/2}{1-k\lambda/2}| < 1$ .

*Bevis.* Vi studerar testekvationen

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad t > 0. \quad (6.24)$$

Eulers metod ger  $u_i = u_{i-1} + k\lambda u_{i-1} = (1 + k\lambda)u_{i-1}$ , bakåt Euler  $u_i = \frac{1}{1 - k\lambda}u_{i-1}$  och mittpunktsmetoden  $u_i = u_{i-1} + k\lambda \frac{u_{i-1} + u_i}{2}$  eller  $u_i = \frac{1 + \frac{k\lambda}{2}}{1 - \frac{k\lambda}{2}}u_{i-1}$ . Enligt Definition 6.5 gäller då att Eulers metod har stabilitetsområde  $|1 + k\lambda| < 1$ , implicit Euler  $|1 - k\lambda| > 1$  och mittpunktsmetoden  $|\frac{1+k\lambda/2}{1-k\lambda/2}| < 1$ .  $\square$

I figur 6.5 illustrerar vi stabilitetsområdena med grå färg i det komplexa talplanet för Eulers metod, bakåt Euler och mittpunktsmetoden. Vi ser att olika värden på  $k\lambda$  leder antingen till en stabil eller instabil approximation.



Figur 6.5: De grå områdena är värden  $k\lambda$  i det komplexa talplanet där Eulers metod (vänster) bakåt Euler (mitten) och mittpunktsmetoden (höger) är stabila.

Det är tydligt att bakåt Euler har ett stort stabilitetsområde. I vårt exempel var  $k = 5/10$  och  $\lambda = -4.2$  vilket innebär att  $k\lambda = -2.1$  som är inom bakåt Eulers stabilitetsområde. För Eulers metod däremot hamnar vi utanför stabilitetsområdet. Dock kan vi genom att minska  $k$  komma in i stabilitetsområdet igen. Det ser vi även i figur 6.4 (vänster) då vi låter  $k = 5/20$  och  $k = 5/40$ .

Sammanfattningsvis drar vi slutsatsen att både bakåt Euler och mittpunktsmetoden har ett stort stabilitetsområde. De ger därför tillförlitliga lösningar för en stor klass problem. Eulers metod har däremot ett



litet stabilitetsområde vilket innebär att det i många fall krävs en väldigt liten steglängd  $k$  för att lösningarna ska vara tillförlitliga över längre tidsintervall.

Våra tre numeriska metoder har alltså olika fördelar och nackdelar. Med Eulers metod slipper vi lösa algebraiska ekvationer vilket är en stor fördel eftersom de kan ta mycket datorkraft i anspråk. Bakåt Euler är den mest robusta metoden som nästan alltid fungerar. Mittpunktsmetoden har högre ordning vilket innebär att om metoden är stabil för ett givet problem kommer lösningen konvergera mycket snabbare än de övriga metoderna. Dock krävs att tredjederivatet av lösningen är begränsad för att en högre konvergensordningen ska uppnås. Olika problemtyper behöver alltså olika numeriska metoder. Det finns fler egenskaper som är viktiga för en numerisk metod. En sådan är metodens förmåga att bevara egenskaper hos den exakta lösningen, till exempel konservering av energi. Vi återkommer till detta längre fram i kapitlet.

## 6.4 Algoritmer

Vi är nu redo att formulera Eulers metod som en algoritm. Sats 6.1 ger att felet i den beräknade lösningen kan begränsas i termer av steglängden  $k$ , Lipschitz-konstanten  $L$  och begränsningen av andra-derivatan  $M$ . Givet  $f$  kan  $L$  beräknas. Konstanten  $M$  är däremot svår att uppskatta när lösningen inte är känd. Den kommer istället med som ett villkor i algoritmen. Vi låter för enkelhets skull steglängden vara konstant.

---

### Algoritm 1 Eulers metod

---

Indata: Kontinuerlig funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , Lipschitzkontinuerlig ( $L$ ) i andra variabeln, startpunkt  $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$ , steglängd  $k$ , slutpunkt  $t_n = T$

Utdata: Approximativ lösning  $\hat{u} \in \mathbb{R}$  sådan att  $|u(t_n) - \hat{u}| \leq \frac{kM}{2L}(e^{L(t_n-t_0)} - 1)$

Villkor:  $\max_{t \in [t_0, t_n]} |u''(t)| \leq M$

```

1:  $i \leftarrow 1$ 
2: while  $t_{i-1} < t_n$  do
3:    $t_i \leftarrow t_{i-1} + k$ 
4:    $u_i \leftarrow u_{i-1} + kf(t_{i-1}, u_{i-1})$ 
5:    $i \leftarrow i + 1$ 
6: end while
7:  $\hat{u} \leftarrow u_{i-1}$ 

```

---

De implicita metoderna, bakåt Euler och mittpunktsmetoden, är lite svårare att implementera eftersom en algebraisk ekvation behöver lösas i varje tidssteg. Fixpunktsiteration är en naturlig metod att använda för att lösa dessa ekvationer eftersom vi vill lösa ekvationer på formen  $x = g(x)$ . För bakåt Euler har vi att

$$g(x) = u_{i-1} + k_i f(t_i, x), \quad (6.25)$$

och för mittpunktsmetoden att

$$g(x) = u_{i-1} + k_i f\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}, \frac{u_{i-1} + x}{2}\right). \quad (6.26)$$

Vi har även en god startgissning i  $x_0 = u_{i-1}$ . Vi presenterar bakåt Euler i Algoritm 2 och mittpunktsmetoden i Algoritm 3.

---

**Algoritm 2** Bakåt Euler
 

---

Indata: Kontinuerlig funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , Lipschitzkontinuerlig ( $L$ ) i andra variabeln, startpunkt  $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$ , steglängd  $k$ , slutpunkt  $t_n$

Utdata: Approximativ lösning  $\hat{u} \in \mathbb{R}$  sådan att  $|u(t_n) - \hat{u}| \leq Ck$  där  $C$  beror på  $t_n, L$  och  $M$

Villkor:  $\max_{t \in [t_0, t_n]} |u''(t)| \leq M$

```

1:  $i \leftarrow 1$ 
2: while  $t_{i-1} < t_n$  do
3:    $t_i \leftarrow t_{i-1} + k$ 
4:    $u_i \leftarrow g(u_i) := u_{i-1} + kf(t_i, u_i)$    Löses med fixpunktsiteration!
5:    $i \leftarrow i + 1$ 
6: end while
7:  $\hat{u} \leftarrow u_{i-1}$ 

```

---



---

**Algoritm 3** Mittpunktsmetoden
 

---

Indata: Kontinuerlig funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , Lipschitzkontinuerlig ( $L$ ) i andra variabeln, startpunkt  $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$ , steglängd  $k$ , slutpunkt  $t_n$

Utdata: Approximativ lösning  $\hat{u} \in \mathbb{R}$  sådan att  $|u(t_n) - \hat{u}| \leq Ck^2$  där  $C$  beror på  $t_n, L$  och  $M$

Villkor:  $\max_{t \in [t_0, t_n]} |u'''(t)| \leq M$

```

1:  $i \leftarrow 1$ 
2: while  $t_{i-1} < t_n$  do
3:    $t_i \leftarrow t_{i-1} + k$ 
4:    $u_i \leftarrow g(u_i) := u_{i-1} + kf(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{u_{i-1}+u_i}{2})$    Löses med fixpunktsiteration!
5:    $i \leftarrow i + 1$ 
6: end while
7:  $\hat{u} \leftarrow u_{i-1}$ 

```

---

Banachs fixpunktssats ger att vi har konvergens om  $|g'(x)| < 1$  för alla  $x$  i ett intervall. För bakåt Euler innebär det att

$$|g'(x)| = k \left| \frac{df}{du}(t_i, x) \right| < 1, \quad (6.27)$$

för alla värden  $x$  i iterationen. I exemplen ovan med  $f(t, u) = \cos(u)$  var derivatan till belopp  $|\sin(u)|$  begränsad av 1. Därför krävs att  $k < 1$  för alla  $i$ . Motsvarande resultat för mittpunktsmetoden blir  $|\frac{1}{2} \sin(u)| \leq \frac{1}{2}$  eftersom den inre derivatan är  $\frac{1}{2}$ . Alltså konvergerar fixpunktsiteration för  $k < 2$ . Om  $u$ -derivatan av  $f$  är stor för de aktuella värdena på  $x$  kan det vara bättre att skriva om fixpunktsiterationen på en annan form eller använda en annan metod som bisektion eller Newtons metod för ekvationen  $x - g(x) = 0$ . Vi vill nämligen undvika ett för litet tidssteg som kan leda till långsamma beräkningar.

Det är inte självklart att de algebraiska ekvationer som uppkommer har reella lösningar för alla steglängder. Vi illustrerar detta i ett exempel.

**Exempel 6.5 (Lösbarhet)** Vi studerar

$$u'(x) = u(x)^2, \quad u(0) = 1, \quad (6.28)$$

vars lösning, som ges av  $u(x) = \frac{1}{1-x}$ , bara existerar på intervallet  $[0, 1)$ . Vi vill nu beräkna en approximation för  $x < 1$  med bakåt Euler. I varje tidssteg behöver vi lösa följande algebraiska ekvation

$$u_i = u_{i-1} + ku_i^2, \quad (6.29)$$

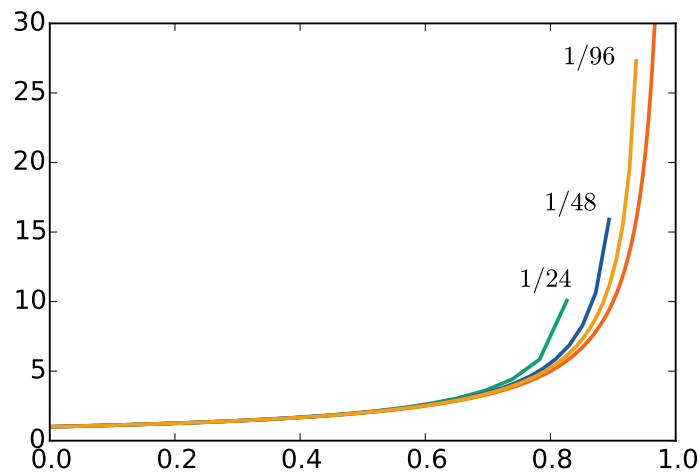
där  $k$  anger det konstanta tidssteget. Detta är en andragradsekvation i variabeln  $u_i$  och lösningen ges av

$$u_i = \frac{1}{2k} \pm \sqrt{\frac{1}{4k^2} - \frac{u_{i-1}}{k}}. \quad (6.30)$$

Eftersom  $u_i$  ska närma sig  $u_{i-1}$  då  $k$  går mot noll representerar endast det negativa tecknet framför rotuttrycket en lösning. Efter omskrivning får vi

$$u_i = \frac{1}{2k} \left( 1 - \sqrt{1 - 4ku_{i-1}} \right). \quad (6.31)$$

Vi ser direkt att för  $i = 1$  krävs att  $k < \frac{1}{4}$  för att ekvationen ska ha en reell lösning. När  $u_{i-1}$  ökar krävs kortare och kortare tidssteg för att fixpunktsiterationen ska ge en lösning. I figur 6.6 studerar vi hur lång tid vi kan genomföra beräkningen med olika konstanta tidssteg innan den algebraiska ekvationen inte längre har någon (reell) lösning. Vi ser bakåt Euler-lösningen, med  $k$  lika med  $1/24$ ,  $1/48$  och  $1/96$ , tillsammans med den exakta lösningen  $\frac{1}{1-x}$  i röd. När linjerna avbryts finns inte längre någon reell rot  $u_i$  till den algebraiska ekvationen. Man kan även tänka sig ett varierande tidssteg  $k_i$  som minskar när  $u_i$  ökar. En sådan metod som är anpassad till lösningen kallas en adaptiv metod.



Figur 6.6: Bakåt Euler-lösningen för  $k = 1/24$ ,  $k = 1/48$  och  $k = 1/96$ . Linjerna avbryts när ekvationerna saknar reella lösningar. Den exakta lösningen  $u(x) = \frac{1}{1-x}$  representeras av den röda linjen.

Förutom problem med lösning av de algebraiska ekvationer som uppkommer och numerisk stabilitet som vi behandlade tidigare, finns flera andra utmaningar vid numerisk lösning av ODE. En sådan, som blir viktig om tidssteget är väldigt litet, är avrundningsfel. Vi lämnar nu algoritmerna och går vidare och generaliserar våra resultat till system av ODE.

## 6.5 Generalisering till system av ODE

De numeriska metoder vi presenterar kan direkt generaliseras till system av första ordningens differentialekvationer.

Låt  $\vec{u}(t) \in \mathbb{R}^d$  vara lösning till den ordinära differentialekvationen på ett intervall  $I = [t_0, T]$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t)) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0, \end{cases} \quad (6.32)$$

där  $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^d$  och  $\vec{f}(t, \vec{u}(t)) \in \mathbb{R}^d$ . Vi låter den numeriska approximationen till  $\vec{u}(t_i)$  i tidpunkten  $t_i$  betecknas  $\vec{u}_i$ . Vi presenterar de tre metoderna igen, nu för system av ODE.

**Definition 6.6 (Eulers metod)** Låt  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  vara en partition av intervallet  $[t_0, T]$  i  $n$  delintervall av längd  $k_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Eulers metod för att beräkna en approximation  $\vec{u}_n$  av lösningen  $\vec{u}(t_n)$  till ekvation (6.32) ges av

$$\frac{\vec{u}_i - \vec{u}_{i-1}}{k_i} = \vec{f}(t_{i-1}, \vec{u}_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.33)$$

**Definition 6.7 (Bakåt Euler)** Låt  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  vara en partition av intervallet  $[t_0, T]$  i  $n$  delintervall av längd  $k_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Bakåt Euler-metoden för att beräkna en approximation  $\vec{u}_n$  av lösningen  $\vec{u}(t_n)$  till ekvation (6.32) ges av

$$\frac{\vec{u}_i - \vec{u}_{i-1}}{k_i} = \vec{f}(t_i, \vec{u}_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.34)$$

**Definition 6.8 (Mittpunktsmetoden)** Låt  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  vara en partition av intervallet  $[t_0, T]$  i  $n$  delintervall av längd  $k_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Mittpunktsmetoden för att beräkna en approximation  $\vec{u}_n$  av lösningen  $\vec{u}(t_n)$  till ekvation (6.32) ges av

$$\frac{\vec{u}_i - \vec{u}_{i-1}}{k_i} = \vec{f}\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}, \frac{\vec{u}_i + \vec{u}_{i-1}}{2}\right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.35)$$

Notera att de implicita metoderna (bakåt Euler och mittpunktsmetoden) nu kräver lösning av en algebraisk ekvation som i detta fall är vektorvärd. Dessa ekvationer löses också med fixpunktsiteration. Genom att minska tidssteget  $k$  kan vi garantera att iterationen konvergerar med Banachs fixpunktssats. Konvergensthastigheten påverkas av Lipschitz-konstanten  $L$  till funktionen  $\vec{f}$ ,

$$|\vec{f}(t, \vec{u}) - \vec{f}(t, \vec{z})| \leq L|\vec{u} - \vec{z}|, \quad t \in I, \quad \vec{u}, \vec{z} \in \mathbb{R}^d, \quad (6.36)$$

som kan bli mer komplicerad att räkna ut i det vektorvärda fallet i jämförelse med det skalärvärda.

**Exempel 6.6 (Lipschitz-konstant)** Vi låter  $d = 2$  och studerar begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t)), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad (6.37)$$

där

$$\vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Bestäm Lipschitz-konstanten för  $\vec{f}$  och avgör om ekvationen har unik lösning. Vi har vi att,

$$|\vec{f}(t, \vec{u}) - \vec{f}(t, \vec{z})| \leq \sqrt{(3z_2 - 3u_2)^2 + (u_1 - z_1)^2} \quad (6.39)$$

$$\leq 3\sqrt{(u_1 - z_1)^2 + (u_2 - z_2)^2} \quad (6.40)$$

$$= 3|\vec{u} - \vec{z}|. \quad (6.41)$$

En Lipschitz-konstant ges alltså av  $L = 3$  och lösningen är unik och existerar för alla  $t$ .

Uppskattningen av felet följer samma mönster som i det skalära fallet. Vi nöjer oss med att formulera resultatet för Eulers metod.

**Sats 6.3 (Konvergensanalys för Eulers metod för system)** Låt  $\vec{u}(t)$  lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}), \quad \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0, \quad (6.42)$$

där den kontinuerliga funktionen  $\vec{f}(t, \vec{u})$  är Lipschitz-kontinuerlig i  $\vec{u}$  med Lipschitz-konstant  $L$  och  $|\frac{d^2}{dt^2}\vec{u}| \leq M$ . Låt  $\vec{u}_n$  vara Euler-approximationen av  $\vec{u}(t_n)$  med konstant steglängd  $k$ , där  $t_n = nk, n = 0, 1, 2, \dots$ . Då gäller

$$|\vec{u}(t_n) - \vec{u}_n| \leq \frac{Mk}{2L} \left( e^{L(t_n - t_0)} - 1 \right). \quad (6.43)$$

*Bevis.* Beviset följer av beviset av sats 6.1. Vi behöver Taylorutveckla i alla  $n$  komponenter och tolka absolutbeloppet som längden av vektorerna.  $\square$

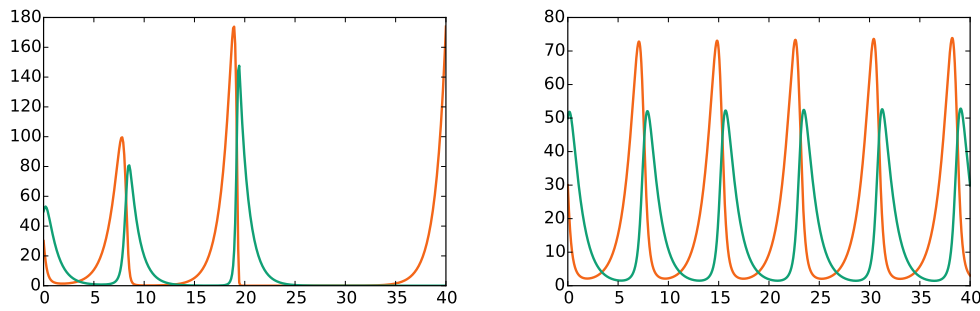
Konvergensordningen för Eulers metod är densamma som i det skalära fallet. Detsamma gäller bakåt Euler och mittpunktsmetoden som är av första respektive andra ordningen. Stabilitetsanalysen är mer komplicerad för system av ODE och kräver kunskap om egenvärden från linjär algebra. Vi nöjer oss med att illustrera stabilitetsproblemet genom att använda Eulers metod för att beräkna lösningen till modellen för råvaror och kaniner, som vi presenterade redan i figur 5.4. Vi börjar med att lösa problemet med 400 delintervall, vilket ger en steglängd på  $k = 0.1$ , och sedan med 40000 delintervall vilket motsvarar  $k = 0.001$ . Sluttiden för beräkningen är satt till  $T = 40$ .

Vi ser att vi har tydliga problem med numerisk instabilitet i det första exemplet. Lösningen ökar i  $t$  medan den exakta lösningen behåller samma magnitud över tid. I det andra exemplet har vi tillräckligt liten steglängd för att Eulers metod ska vara stabil.

Det finns fler egenskaper hos en numerisk lösning som är eftersträvansvärd förutom stabilitet och konvergens. En sådan är bevarande av egenskaper hos lösningen. Vi illustrerar detta med ett exempel.

**Exempel 6.7 (Energibevarande)** Vi går tillbaka till kapitel 5 och de alternativa definitionerna av  $\cos(t)$  och  $\sin(t)$  som system av ODE. Vi har följande linjära system av ODE

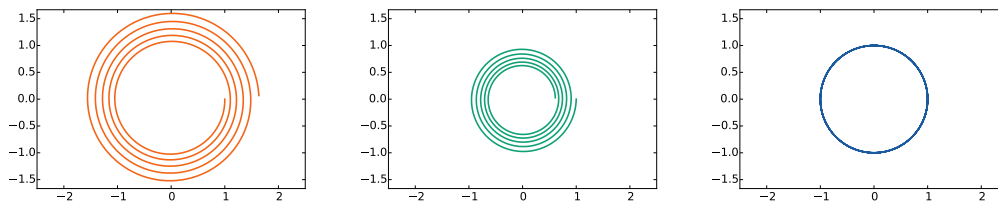
$$\begin{bmatrix} u'(x) \\ z'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x) \\ z(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$



Figur 6.7: Lösning för systemet med rävar och kaniner med Eulers metod och steglängd  $k = 0.1$  (vänster) respektive  $k = 0.001$  (höger). Vi ser att lösningen för  $k = 0.1$  är instabil medan den för  $k = 0.001$  är stabil på grund av tillräckligt litet tidssteg.

vars lösning ges av  $u(t) = \cos(t)$  och  $z(t) = \sin(t)$ . Kvantiteten  $E(t) = \frac{1}{2}(u(t)^2 + z(t)^2)$  kan tolkas som systemets energi vid tiden  $t$ . Trigonometriska ettan ger att  $E(t) = \frac{1}{2}$  för alla  $t$ , det vill säga energin är bevarad.

Vi löser nu systemet på intervallet  $[0, 10\pi]$  med 1000 steg,  $k = 10\pi/1000$ , med Eulers metod, bakåt Euler och mittpunktsmetoden. I figur 6.8 plottar vi approximationerna till  $(u(t), z(t))$  i planet. Notera att den exakta lösningen ligger på enhetscirkeln. Eulers metod ger en lösning som tillför energi och cirkelarna växer medan bakåt Euler tar bort energi och cirkelarna minskar. Mittpunktsmetoden däremot bevarar energin över tid. Detta är ännu en aspekt som kan vara viktig för en numerisk approximation och som är en styrka för mittpunktsmetoden.



Figur 6.8: Vi ser att Eulers metod leder till att cirkelarna vidgas (vänster) och bakåt Euler till att de krymper (mitten) medan mittpunktsmetoden bevarar energin.

## 6.6 Randvärdesproblem

Så här långt har vi helt och hållet fokuserat på begynnelsevärdesproblem. Det finns dock en annan klass av differentialekvationsproblem som är minst lika viktig i tillämpningar, nämligen randvärdesproblem. Medan begynnelsevärdesproblemen endast har (begynnelse)villkor vid en startpunkt har randvärdesproblemen (rand)villkor både i start- och slutpunkten. Vi ger ett exempel från värmeledning i en endimensionell stav.

**Exempel 6.8 (Värmeledningsekvationen)** Vi studerar stationär värmeledning i en endimensionell stav av längd  $L$ . Temperaturen  $u(x)$  löser följande randvärdesproblem som också är en ODE,

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(\kappa \frac{du}{dx}) = q(x), & 0 < x < L, \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases} \quad (6.45)$$

där  $x$  är rumskoordinaten,  $\kappa$  är värmeledningskoefficienten och  $q(x)$  är värmeförlusten som beror av positionen  $x$ . Genom att införa hjälpvariablerna  $u_1 = u$  och  $u_2 = \frac{du_1}{dx}$  kan vi skriva om ekvationen som ett system av första ordningens ODE,

$$\frac{du_1}{dx} = u_2, \quad (6.46)$$

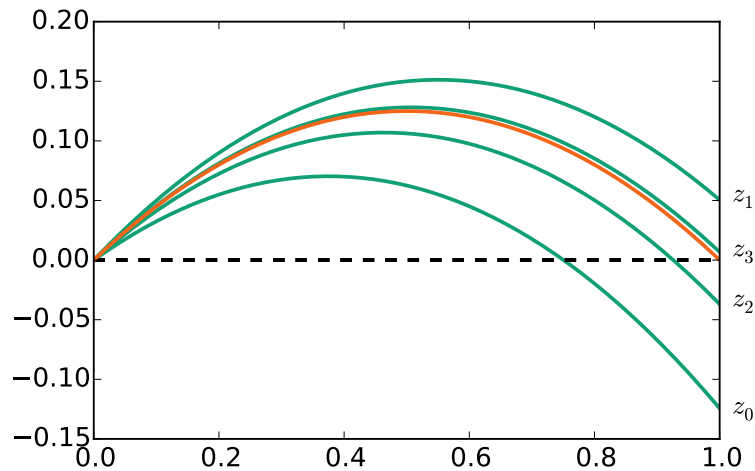
$$\frac{du_2}{dx} = -\frac{q(x)}{\kappa}, \quad (6.47)$$

med begynnelsevillkor bara i den första variabeln  $u_1(0) = 0$  fast med det extra randvillkoret  $u_1(L) = 0$ .

Anledningen till att vi så här långt fokuserat på begynnelsevärdesproblem är att randvärdesproblem ofta leder till partiella differentialekvationer eftersom den oberoende variabeln vanligen är rumskoordinater i  $\mathbb{R}^3$ . I fallet med staven gör vi en endimensionell approximation av ett tredimensionellt objekt. Begynnelsevärdesproblemen har typiskt tiden som oberoende variabel vilken naturligt är endimensionell. En annan anledning är att de mer kraftfulla numeriska metoderna för att lösa randvärdesproblem kräver djupare kunskaper i linjär algebra.

Det finns dock en teknik som gör att våra ODE-lösare även kan användas för att lösa randvärdesproblem i en variabel. Metoden kallas inskjutning och idén är enkel. Vi gissar helt enkelt ett värde på  $z$ , och sätter  $u_2(0) = z$  i exemplet. Därmed har vi två begynnelsevillkor och kan genom att använda en ODE-lösare (till exempel Eulers metod) beräkna  $u_1(L)$  som kommer bli en funktion av  $z$ . Låt oss kalla den  $f(z) = u_1(L)$ . För varje  $z$  kan alltså  $f(z)$  beräknas genom att lösa ett begynnelsevärdesproblem. Detta innebär att funktionen  $f(z)$  är definierad implicit. Vi vill hitta ett  $z$  sådant att  $f(z) = 0$  eftersom  $u_1$  och  $u_2$  med begynnelsevillkoren  $u_1(0) = 0$  och  $u_2(0) = z$  då kommer lösa randvärdesproblemet. Att funktionen  $f(z)$  är definierad implicit hindrar oss inte från att använda till exempel bisektionsmetoden eller Newtons metod för att lösa ekvationen  $f(z) = 0$ . Vi återgår till exemplet med endimensionell värmeledning och visar hur en approximativ lösning kan beräknas med inskjutning.

**Exempel 6.9 (Inskjutning)** Vi låter  $\kappa = q = 1$  i exemplet ovan och använder mittpunktsmetoden med konstant steglängd  $k = 0.01$  och startar med gissningarna  $u_2(0) = z$  med  $z_0 = 0.2$  för att beräkna en första approximation och  $z_1 = 0.9$  för att beräkna en andra. Vi ser resultatet i figur 6.9. Eftersom  $z_0$  och  $z_1$  är valda så att  $f(z_0) < 0$  och  $f(z_1) > 0$  vet vi att det finns en lösning för något  $z \in [z_0, z_1]$  och att vi kan hitta lösningen med hjälp av bisektion. Vi låter  $z_2 = \frac{z_0 + z_1}{2}$  vara mittpunkten och får då  $f(z_2) < 0$ . Det innebär att  $z_2$  blir ny undre gräns och vi beräknar  $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ . För varje iteration närmar vi oss målet. Namnet inskjutning kommer just ifrån att vi försöker hitta den bana som träffar målet  $u(L) = 0$ .



Figur 6.9: Inskjutningsmetoden med startvärden  $z_0 = 0.2$  och  $z_1 = 0.9$ . Mittpunktsmetoden tillsammans med bisektion används för att beräkna de approximativa lösningarna.

## Övningar

### 6.1 Numeriska metoder

**Övning 6.1** Studera ekvationen  $y'(x) = y(x)$ , med begynnelsevillkor  $y(0) = 1$ . Vad blir approximation av  $y(1)$  beräknad med Eulers metod, givet att intervallet  $[0, 1]$  delas in i  $n$  lika stora delintervall?

**Övning 6.2** Studera ekvationen  $y'(x) = 2y(x)$ , med begynnelsevillkor  $y(0) = 1$ . Vad blir bakåt Euler approximationen till  $y(1)$ , givet att intervallet  $[0, 1]$  delas in i  $n$  lika stora delintervall?

**Övning 6.3** Studera ekvationen  $y'(x) = y(x)^2$ , med begynnelsevillkor  $y(0) = 1$ . Vad blir approximation av  $y(0.2)$  beräknad med Eulers metod, givet att intervallet  $[0, 0.2]$  delas in i 2 lika stora delintervall?

**Övning 6.4** Använd mittpunktsmetoden med konstant steglängd för att beräkna en approximation till  $e = y(1)$  där  $y(x)$  löser ekvationen  $y'(x) = y(x)$ ,  $y(0) = 1$ .

**Övning 6.5** Använd Eulers metod med konstant steglängd  $k = 0.2$  för att beräkna en approximation till  $y(0.4)$  där  $y(x)$  löser ekvationen  $y'(x) = 1 - y(x)^2$ ,  $y(0) = 0$ .

**Övning 6.6** Använd Eulers metod med konstant steglängd  $k = 0.2$  för att beräkna en approximation till  $y(0.4)$  där  $y(x)$  löser ekvationen  $y'(x) = xy(x)$ ,  $y(0) = 1$ .



**Övning 6.7** Heuns metod för att lösa  $y'(t) = f(t, y(t))$  där  $y(0) = y_0$  är en andra ordningens metod som definieras i två steg,

$$\begin{aligned}\tilde{y}_i &= y_{i-1} + kf(t_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_i &= y_{i-1} + \frac{k}{2}(f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, \tilde{y}_i)),\end{aligned}$$

där  $k$  är steglängden. Är Heuns metod explicit eller implicit?

### 6.2 Konvergens

**Övning 6.8** Studera begynnelsevärdesproblemet  $y'''(t) + y'(t) = \sin(t)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 1$ . Skriv som ett system av första ordningens ODE. Ange en numerisk metod som kan användas för att lösa ekvationen samt metodens konvergensordning.

**Övning 6.9** Studera ekvationen  $y'(x) + y(x) = x$  med begynnelsevillkor  $y(0) = 0$ . Lös först ekvationen analytiskt. Dela in  $[0, 1]$  i 100 lika långa delintervall. Ange en uppskattning av felet mellan Euler metod och det exakta lösningen  $y(1)$ .

**Övning 6.10** Studera ekvationen  $y'(x) = \cos(y(x))$  med begynnelsevillkor  $y(0) = 0$ . Beräkna en uppskattning av  $|y''(x)|$ . Dela in  $[0, 2]$  i 100 lika långa delintervall. Ange en uppskattning av felet mellan Eulers metod och det exakta värdet  $y(1)$ .

**Övning 6.11** Studera  $y'(x) = -y(x)$ ,  $y(0) = 1$ . Uppskatta felet i Euler approximationen med steglängd  $k = 0.1$  på intervallet  $t \in [0, T]$  med hjälp av sats 6.1. Efter hur lång tid  $T$  är feluppskattningen större än 1?

**Övning 6.12** I exempel 6.3 ger en steglängd på  $\pi/10$  ett fel på 0.00064 med mittpunktsmetoden och 0.012 med Eulers metod. Hur stor steglängd behöver vi använda med Eulers metod för att få samma fel som mittpunktsmetoden?

### 6.3 Stabilitet

**Övning 6.13** Studera ekvationen  $y'(x) = -10y(x)$ ,  $y(0) = 1$ . Vilken steglängd krävs för att Eulers metod respektive bakåt Euler ska vara stabila?

**Övning 6.14** Visa att mittpunktsmetodens stabilitetsområde innehåller alla punkter på den negativ reella axeln, alltså alla  $k\lambda \in \mathbb{R}$  sådana att  $k\lambda < 0$ .

**Övning 6.15** Visa att bakåt Eulers stabilitetsområde innehåller alla punkter på den negativ reella axeln, alltså alla  $k\lambda \in \mathbb{R}$  sådana att  $k\lambda < 0$ .

### 6.4 Generalisering till system

**Övning 6.16** Formulera Eulers metod för systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Låt steglängden  $k = 0.1$  och beräkna lösningen efter ett steg.

**Övning 6.17** Formulera Eulers metod för systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Låt steglängden  $k = 0.1$  och beräkna lösningen efter ett steg.

**Övning 6.18** Formulera bakåt Euler för systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Låt steglängden vara  $k$ .

**Övning 6.19** Formulera bakåt Euler för systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med steglängd  $k$ .

**Övning 6.20** Studera begynnelsevärdesproblemet  $y''(t) + y(t)^2 = \sin(t)$ ,  $y(0) = 1$  och  $y'(0) = 0$ . Skriv som ett system av första ordningen och utför ett steg med Eulers metod, med steglängd  $k = 0.1$ .

**Övning 6.21** Studera begynnelsevärdesproblemet  $y''(t) - 4y(t) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . Skriv som ett system av första ordningen ODE på matrisform. Utför ett steg av bakåt Euler med steglängd  $k = 0.1$ .

### 6.5 Randvärdesproblem

**Övning 6.22** Studera Exempel 6.8. Låt  $\kappa = L = 1$  och välj  $q(x)$  sådant att lösningen blir  $u(x) = x^2(1 - x)$ .

**Övning 6.23** Studera Exempel 6.8. Låt  $\kappa = L = 1$  och välj  $q(x)$  sådant att lösningen blir  $u(x) = \sin(\pi x)$ .

**Övning 6.24** Låt  $q(x) = x^2$  och  $L = \kappa = 1$  i Exempel 6.8. Räkna ut  $u(x)$  genom att integrera ekvationen två gånger och använda randvillkoren.

**Övning 6.25** Låt  $q(x) = \sin(\pi x)$  och  $L = \kappa = 1$  i Exempel 6.8. Räkna ut  $u(x)$ .

## Problem

### 6.1 Numeriska metoder

**Problem 6.1** Studera  $y'(t) = y^2$  där  $y(0) = 1$ . Låt  $k = 0.1$  och beräkna  $y_2$  med Heuns metod från övning 6.7.

**Problem 6.2** Studera  $u'(t) = \sqrt{u(t)}$  med begynnelsevillkor  $u(0) = 0$ . Visa att Eulers metod inte kan approximera lösningen  $u(t) = \frac{1}{4}t^2$ . Låt  $k = 0.1$  och beräkna en approximation till  $u(0.2)$  med bakåt Euler.

### 6.2 Konvergens

**Problem 6.3** Bevisa att bakåt Euler är en första ordningens metod.

**Problem 6.4** Studera ekvationen  $u'(t) = f(t)$ ,  $u(0) = u_0$ , där alltså  $f$  är oberoende av  $u$ . Visa att  $u(t) = u_0 + \int_0^t f(s) ds$  och att för Eulers metod med konstant steglängd gäller  $|u(t_n) - u_n| \leq \frac{k^2 n M}{2}$  där  $|u''(t)| \leq M$  för alla  $t$ .

### 6.3 Stabilitet

**Problem 6.5** Ge ett uttryck för stabilitetsområdet för Heuns metod presenterad i övning 6.7.

**Problem 6.6** Låt  $u'(x) = f(x, u(x))$  med  $u(0) = u_0$ . En numerisk metod som kallas  $\theta$ -metoden är definierad som  $u_i = u_{i-1} + k((1 - \theta)f_{i-1} + \theta f_i)$  där  $0 \leq \theta \leq 1$ . Visa att  $\theta$ -metoden stabilitetsområde är vänstra halvplanet,  $\operatorname{Re}(k\lambda) < 0$ , då  $\theta \geq \frac{1}{2}$ .

### 6.4 Generalisering till system

**Problem 6.7** Skriv som system av första ordningen och genomför en iteration med bakåt Euler metoden för differentialekvationen  $y''(x) + y'(x) = 1 + x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ , med steglängd  $k = 0.1$ .

**Problem 6.8** Visa att mittpunktsmetoden bevarar energin i exempel 6.7 i första tidsteget.

### 6.5 Randvärdesproblem

**Problem 6.9** Visa att  $\int_0^L u(x) dx \geq 0$  om  $q \geq 0$  är en konstant och  $\kappa = 1$  i exempel 6.8. *Tips:* Multiplicera ekvationen med  $u(x)$  och integrera från 0 till  $L$ .

**Problem 6.10** Vi studerar exempel 6.8 och låter  $L = \kappa = 1$ . Visa att  $u'(1) = -\int_0^1 xq(x) dx$  genom att multiplicera ekvationen med  $x$  och integrera från 0 till 1.

# 7. Tillämpningar

7.1	Tyngdpunkt	135
7.2	Mekaniska system	138
7.3	Solsystemet	138

## 7.1 Tyngdpunkt

Bestämning av en kropps massa, momentet runt en given axel eller kroppens tyngdpunkt är alla tillämpningar av integralen. Vi börjar med att studera dessa begrepp för en mängd punktmassor  $\{m_i\}_{i=1}^n$  placerade i planet med koordinater  $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ . Den sammanlagda massan blir

$$m = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (7.1)$$

Momenten avseende på linjerna  $x = x_0$  och  $y = y_0$  ges av

$$M_{x=x_0} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_0), \quad (7.2)$$

$$M_{y=y_0} = \sum_{i=1}^n m_i(y_i - y_0). \quad (7.3)$$

Momentet tas alltså med avseende på en linje i planet. I det här fallet linjer som är parallella med  $x$ - respektive  $y$ -axeln. Momentets storlek ges av massan gånger hävarmen som ges av det vinkelräta avståndet (med tecken) mellan massan och linjen som momentet tas med avseende på.

Punktmassornas tyngdpunkt är den punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  där både  $M_{x=\bar{x}} = M_{y=\bar{y}} = 0$ . Tyngdpunkten har alltså två koordinater i två dimensioner och  $d$  koordinater i  $d$  dimensioner. Vi kan ta fram formler för  $\bar{x}$  och  $\bar{y}$  på följande vis. Genom att låta  $M_{x=\bar{x}} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - \bar{x}) = 0$  får vi

$$\bar{x}m = \bar{x} \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i = M_{x=0} \quad (7.4)$$

eller

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}. \quad (7.5)$$

På samma sätt får vi även

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}. \quad (7.6)$$

Härledningen av tyngdpunkten för en punktmängd kan generaliseras till bestämning av tyngdpunkt för en kropp i planet. Vi låter  $R$  utgöra ett område i planet mellan en given funktion  $f$  och  $x$ -axeln mellan  $x = a$  och  $x = b$  och  $\rho = \rho(x)$  vara densiteten som tillåts variera enbart i  $x$ -led. Massan ges av integralen över kroppen med densiteten som integrand

$$m = \int_a^b \rho(x) f(x) dx. \quad (7.7)$$

Definitionen av tyngdpunkt är densamma för området som för punktmängden, nämligen att

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}, \quad (7.8)$$

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}. \quad (7.9)$$

Momentet med avseende på linjen  $x = 0$  ges av integralen mellan  $x = a$  och  $x = b$  av  $f(x)$  gånger densiteten  $\rho(x)$  gånger hävarmen  $x$

$$M_{x=0} = \int_a^b x \rho(x) f(x) dx. \quad (7.10)$$

Momentet med avseende på linjen  $y = 0$  ges av integralen mellan  $x = a$  och  $x = b$  av  $f(x)$  gånger densiteten  $\rho(x)$  gånger hävarmen  $\frac{1}{2}f(x)$  eftersom densiteten är konstant i  $y$ -led och tyngdpunkten för varje segment därför blir  $\frac{1}{2}f(x)$ . Vi får,

$$M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 \rho(x) dx. \quad (7.11)$$

Sammantaget har vi därför

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b f(x) x \rho(x) dx}{\int_a^b f(x) \rho(x) dx}, \quad (7.12)$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 \rho(x) dx}{\int_a^b f(x) \rho(x) dx}. \quad (7.13)$$

Dessa allmänna formler kan nu användas för att beräkna tyngdpunkten av ett område i planet.

**Exempel 7.1 (Tyngdpunkt)** Beräkna tyngdpunkten för det område i planet (med konstant densitet) som begränsas av funktionen  $f(x) = x^4$  och linjen  $f(x) = 1$ . Symmetri ger att  $\bar{x} = 0$  eftersom densiteten är konstant. För att beräkna  $\bar{y}$  så behöver vi räkna ut massan och momenten i  $y$ -led med avseende på origo. Vi får

$$m = \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}, \quad (7.14)$$

och

$$M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^4)^2 dx = \int_0^1 (1-x^4)^2 dx = 1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{32}{45}, \quad (7.15)$$

alltså,

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{4}{9}. \quad (7.16)$$

Hos ett objekt som har konstant densitet kallas tyngdpunkt för centroid. Eftersom densiteten är konstant beror centroidens läge endast på objektets form. I formlerna för tyngdpunkt kan massan ersättas av arean och densiteten sätts till  $\rho = 1$ .

**Exempel 7.2 (Halvcirkelns centroid)** Vi låter  $-a \leq x \leq a$  och studerar objektet som begränsas av  $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  och  $x$ -axeln, alltså en halvcirkel. På grund av symmetri har vi direkt att  $\bar{x} = 0$ . För att beräkna centroidens  $y$ -koordinat använder vi formeln  $\bar{y} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x)^2 dx$ . Vi får

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-a}^a a^2 - x^2 dx}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{4a}{3\pi}. \quad (7.17)$$

**Exempel 7.3 (Triangelns centroid)** Bestäm centroiden hos en triangel med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  och  $(0, 1)$ . Areal ges av 1. Momentet med avseende på  $x = 0$  ges av  $M_{x=0} = \int_0^2 x - \frac{x^2}{2} dx = \frac{2}{3}$ . Momentet med avseende på  $y$  ges av  $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^2 (1 - \frac{x}{2})^2 dx = \frac{1}{3}$ . Vi får  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ . I allmänhet gäller för en triangel med hörn i  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  och  $(x_3, y_3)$  att centroiden ges av  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ .

Centroiden kan även användas för att beräkna volym hos en rotationskropp på enkelt sätt. Volymen av en kropp som roterar runt en linje är lika med arean gånger sträckan centroiden färdats.

**Sats 7.1 (Guldins regler)** (a) Volymen som uppstår då en kropp  $R$  i planet roterar runt en linje  $l$  är lika med arean  $A$  av  $R$  gånger längden som masscentrum (givet konstant densitet) färdas

$$V = 2\pi r A, \quad (7.18)$$

där  $r$  är det vinkelräta avståndet mellan masscentrum av  $R$  och  $l$ .

(b) Areal som uppstår då en kurva  $C$  i planet roterar runt en linje  $l$  är lika med längden  $L$  av  $C$  gånger längden som masscentrum (givet konstant densitet) färdas

$$A = 2\pi r L, \quad (7.19)$$

där  $r$  är det vinkelräta avståndet mellan masscentrum av  $C$  och  $l$ .

Beviset av första delen följer av att vi väljer ett koordinatsystem där  $l$  är  $y$ -axeln och  $R$  befinner sig mellan  $x = a$  och  $x = b$ . Vi låter höjden av  $R$  som funktion av  $x$  variera kontinuerligt som enligt en hjälpfunktion  $f(x)$

Då gäller att  $r = \bar{x}$  kortaste avståndet till tyngdpunkten. Vi får att,

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi M_{x=0} = 2\pi \bar{x} A = 2\pi r A. \quad (7.20)$$

Andra delen av satsen lämnas som övning.

**Exempel 7.4 (Volymen av en torus)** Vi vill beräkna volymen av en torus (doughnut). Låt torusen bildas av en cirkel med radie  $r$  som roterar runt  $y$ -axeln. Vi låter  $R$  vara kortaste avståndet från cirkelns centrum till  $y$ -axeln. Cirkelns area ges av  $\pi r^2$ . Guldins första regel ger då att torusens volym är

$$V = 2\pi R \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R. \quad (7.21)$$

## 7.2 Mekaniska system

---

## 7.3 Solsystemet

---



## Övningar

### 7.1 Tyngdpunkt

**Övning 7.1** Bestäm centroiden.

- (a) Området i planet som begränsas av  $y = 1 - x^2$  och  $y = 0$ .
- (b) Ett område som begränsas av  $f(x) = \cos(x)$ ,  $x$ -axeln,  $x = 0$  och  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- (c) Området i planet som begränsas av  $y = \sqrt{1 - x^2}$  och  $y = 0$ .
- (d) Området i planet som begränsas av linjerna  $y = x$ ,  $y = 3 - 2x$  och  $y = 0$ .

**Övning 7.2** Bestäm tyngdpunkten.

- (a) En formation av sex identiska flygplan, som var och en har sin tyngdpunkt i punkterna  $(-2, 0)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(1, 2)$  respektive  $(2, 0)$ .
- (b) Området i planet som begränsas av  $x$ -axeln,  $y$ -axeln och funktionen  $f(x) = 1 - x$  vars densiteten varierar som  $\rho(x) = 1 + x$ .
- (c) En triangel med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  och  $(0, 1)$  vars densitet varierar som  $\rho(x) = 1 + x$ .
- (d) Område i planet som begränsas av linjerna  $y = 1 - x$ ,  $x = 0$  och  $y = 0$  vars densitet varierar som  $\rho(x) = 1 + x$ .

**Övning 7.3** Bestäm volymen av kroppen som uppkommer då ett givet område roterar runt  $y$ -axeln.

- (a) En kvadrat med hörn i punkterna  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  och  $(3, 1)$ .
- (b) En cirkel med centrum i  $(2, 2)$  och radie 1.
- (c) En triangel med hörn i  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  och  $(1, 1)$ .
- (d) Området som begränsas av funktionen  $f(x) = 1 - (x - 2)^2$  och  $x$ -axeln.

## Problem

### 7.1 Centroid

**Problem 7.1** Bevisa andra delen av Pappus sats.

**Problem 7.2** ★ Visa att centroiden för en triangel med hörn i  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  och  $(x_3, y_3)$  ges av  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ .

# Appendix A: Grekiska alfabetet

## Lilla grekiska alfabetet

---

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	zeta
$\eta$	$\theta$	$\iota$	$\kappa$	$\lambda$	$\mu$
eta	theta	iota	kappa	lambda	mu
$\nu$	$\xi$	$\omicron$	$\pi$	$\rho$	$\sigma$
nu	xi	omicron	pi	rho	sigma
$\tau$	$\upsilon$	$\phi$	$\chi$	$\psi$	$\omega$
tau	upsilon	phi	chi	psi	omega

Bokstäverna  $\epsilon$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  och  $\phi$  finns också i varianterna  $\epsilon$ ,  $\vartheta$ ,  $\varsigma$  och  $\varphi$ .

## Stora grekiska alfabetet

---

$A$	$B$	$\Gamma$	$\Delta$	$E$	$Z$
Alfa	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta
$H$	$\Theta$	$I$	$K$	$\Lambda$	$M$
Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	Mu
$N$	$\Xi$	$O$	$\Pi$	$P$	$\Sigma$
Nu	Xi	Omicron	Pi	Rho	Sigma
$T$	$Y$	$\Phi$	$X$	$\Psi$	$\Omega$
Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

## Appendix B: Programmering

Bokens datorövningar kan lösas i MATLAB eller valfritt programmeringsspråk (Fortran, C, C++, C#, Java, Python, Julia, Haskell, ...). Här sammanfattas några vanliga kommandon som kan vara användbara för att lösa bokens datorövningar i Python eller MATLAB. Python-modulen `pylab`<sup>1</sup> ger tillgång till funktionalitet liknande den i MATLAB. Detta gör att många av de kommandon som krävs för att lösa bokens datorövningar är identiska i MATLAB och Python.

### Uppstart

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>from pylab import *</code>	
<i>Placeras först i scriptet</i>	<i>Kräver ingen import av extra funktionalitet</i>

### Visa plottar

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>show()</code>	
<i>Placeras sist i scriptet</i>	<i>Kräver inget kommando; plottar visas direkt</i>

### Iterera ett givet antal gånger

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>for n in range(10):</code> ...	<code>for n=1:10</code> ... <code>end</code>
<i>Itererar över <math>n = 0, 1, \dots, 9</math></i>	<i>Itererar över <math>n = 1, 2, \dots, 10</math></i>

### Upprepa så länge ett villkor är uppfyllt

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>while condition:</code> ...	<code>while condition</code> ... <code>end</code>
<i>Upprepar så länge <code>condition</code> är uppfyllt</i>	<i>Upprepar så länge <code>condition</code> är uppfyllt</i>

<sup>1</sup>Python-modulen `pylab` kombinerar de två Python-modulerna `numpy` och `matplotlib`, vilka ger tillgång till vektorer och matriser (arrayer) och plottning.

## Definiera villkorssatser

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>if condition0:     ... elif condition1:     ... else:     ...</pre>	<pre>if condition1     ... elseif condition2     ... else     ... end</pre>

## Definiera funktioner

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>def foo(x):     ...     y = ...     return y</pre>	<pre>function y = foo(x)     ...     y = ...; end</pre>
	<i>Måste läggas i fil med namn foo.m</i>

Skapa linjär vektor (array) med  $x$ -värden

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>x = linspace(a, b, 101)</pre>	<pre>x = linspace(a, b, 101);</pre>
<i>Ger 101 punkter och 100 intervall</i>	<i>Ger 101 punkter och 100 intervall</i>

Skapa logaritmisk vektor (array) med  $x$ -värden

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>x = logspace(-16, 16, 33)</pre>	<pre>x = logspace(-16, 16, 33);</pre>
<i>Ger 33 punkter mellan <math>1 \times 10^{-16}</math> och <math>1 \times 10^{16}</math></i>	<i>Ger 33 punkter mellan <math>1 \times 10^{-16}</math> och <math>1 \times 10^{16}</math></i>

## Plotta en funktion

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>plot(x, y)</pre>	<pre>plot(x, y)</pre>

## Sätta axelmarkörer och titlar

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>title('y = f(x)')</code>	<code>title('y = f(x)')</code>
<code>xlabel('x')</code>	<code>xlabel('x')</code>
<code>ylabel('y')</code>	<code>ylabel('y')</code>
<i>Använd '\$x\$' för L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-notation</i>	

## Anpassa linjärt polynom till punkter

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>p = polyfit(x, y, 1)</code>	<code>p = polyfit(x, y, 1);</code>
<i>Polynomet ges av <math>p[0]*x+p[1]</math></i>	<i>Polynomet ges av <math>p(1)*x+p(2)</math></i>

## Evaluera polynom i punkter

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>y = polyval(p, x)</code>	<code>y = polyval(p, x);</code>

## Spara plot till fil

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>savefig('foo.png')</code>	<code>print('foo', '-dpng')</code>
<code>savefig('foo.pdf')</code>	<code>print('foo', '-pdf')</code>

## Kapitel 1

### Övningar

**Ö1.1** (a) 1365 (b) 1925 (c) 70 (d) -1

**Ö1.2** (a) Arean ges av  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ . Summan blir  $\sum_{i=1}^n \frac{3i}{n} \frac{1}{n} = \frac{3}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$ . I gräns får vi  $A = 3/2$ .  
 (b) Summan blir  $\sum_{i=1}^n (\frac{i^2}{n^2} + 1) \frac{1}{n} = \frac{8n^2 + 3n + 1}{6n^2}$ . Med  $n \rightarrow \infty$  får vi  $4/3$ .  
 (c) Avståndet till  $y = 0$  ges av  $0 - f$ , dvs.  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (1 - \frac{i^2}{n^2}) \frac{1}{n} = 2/3$  (En area är alltid positiv).  
 (d)  $f$  är negativ på  $[0, 1]$ , så summan blir  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 3 + 2 \frac{i}{n} - 2 \frac{i^2}{n^2} = 3 + \frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$ . I gräns får vi  $A = \frac{10}{3}$ .

**Ö1.3** (a) Arean  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ . Summan blir  $\sum_{i=1}^n f(1 + \frac{2i}{n}) \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n (\frac{n+2i}{n})^2 \frac{2}{n} = \frac{26n^2 + 24n + 4}{3n}$ . I gräns får vi  $A = 26/3$ .  
 (b) Summan blir  $\sum_{i=1}^n (12 - 5(\frac{3i}{n} - 2)) \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{66}{n} - \frac{45i}{n^2} = 66 - \frac{45n+45}{2n}$ . När  $n \rightarrow \infty$  blir  $A = 43.5$ .  
 (c)  $f$  korsar x-axeln i  $x = 1/2$  och intervallet behöver därför delas i två. Summan blir  $\sum_{i=1}^n \frac{1-i/n}{4n} + \sum_{i=1}^n \frac{i/n}{4n}$ . Arean  $A = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ .  
 (d) Summan blir  $\sum_{i=1}^n \frac{ka^2}{n^2} = ka^2 \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{ka^2}{2} \frac{n+1}{n}$ , vilket konvergerar mot  $A = \frac{ka^2}{2}$ .

**Ö1.4** (a) Arean ges av  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - f(x_i))(x_i - x_{i-1}) = 1/3$ .  
 (b) Vi summerar  $f - g = 2x + x^2$  över intervallet och får  $A = 16/3$ .  
 (c)  $f - g = x$  och svaret blir  $A = 12$   
 (d)  $f - g = k$ , så  $A = k(b - a)$

**Ö1.5** (a)  $\Delta x_i = 1$ .  $I_{\min} = \sum_{i=1}^3 (i-1)^3 = 0 + 1 + 8 = 9$ .  $I_{\max} = \sum_{i=1}^3 i^3 = 1 + 8 + 27 = 36$   
 (b)  $\Delta x_i = 3/2$ .  $I_{\min} = \sum_{i=1}^2 \sqrt{9 - (\frac{3i}{2})^2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \approx 3.90$ .  $I_{\max} = \sum_{i=0}^1 \sqrt{9 - (\frac{3i}{2})^2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} (3 + \sqrt{\frac{27}{4}}) = \frac{9}{4} (2 + \sqrt{3}) \approx 8.40$ .  
 (c)  $\Delta x_i = 1/2$ .  $I_{\min} = \sum_{i=1}^4 e^{-i/2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e^{-1/2} + e^{-1} + e^{-3/2} + e^{-2}) \approx 0.666$ .  $I_{\max} = \sum_{i=1}^4 e^{-\frac{i-1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + e^{-1/2} + e^{-1} + e^{-3/2}) \approx 1.099$   
 (d)  $\Delta x_i = (5-1)/10 = 2/5$ .  $I_{\min} = \sum_{i=1}^{10} (\frac{2(i-1)}{5} + 1)^2 \frac{2}{5} = \sum_{i=1}^{10} (\frac{2i}{5} + \frac{3}{5})^2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{125} \sum_{i=1}^{10} (4i^2 + 12i + 9) = \frac{2}{125} \left( 4 \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6} + 12 \frac{10(10+1)}{2} + 9 \times 10 \right) = \frac{916}{25} = 36.64$ .  
 $I_{\max} = \sum_{i=1}^{10} (\frac{2i}{5} + 1)^2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{125} \sum_{i=1}^{10} (4i^2 + 20i + 25) = \frac{2}{125} \left( 4 \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6} + 20 \frac{10(10+1)}{2} + 25 \times 10 \right) =$

$$\frac{1156}{25} = 46.24.$$

**Ö1.6** (a)  $\Delta x_i = \pi/4$ .  $I_{\min} = \frac{\pi}{4}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \cos(-\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .  $I_{\max} = \frac{\pi}{4}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \cos(0) + \cos(0) + \cos(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})$ .

(b)  $\Delta x_i = \frac{1}{100}$ .  $I_{\min} = \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{100} - \left(\frac{i}{100} - 1\right) \times \frac{1}{100} + \sum_{i=1}^{100} \frac{i-1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{100}(\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{100} - \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{100} + \sum_{i=1}^{100} 1 - \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{100}) = \frac{99}{10000} = 0.99$ .  $I_{\max} = \sum_{i=1}^{100} \frac{i-1}{100} - \left(\frac{i-1}{100} - 1\right) \times \frac{1}{100} + \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{100}(\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{100} - \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{100} + \sum_{i=1}^{100} 1 + \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{100}) = \frac{101}{100} = 1.01$ .

(c)  $I_{\min} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (i-1)^2 = 5/3$ .  $I_{\max} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 i^2 = 14/3$ .

(d)  $\Delta x_i = 1$ .  $I_{\min} = \sum_{i=1}^k \ln i = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln k = \ln(1 \times 2 \times \dots \times k) = \ln(k!)$ .  $I_{\max} = \sum_{i=1}^k \ln(i+1) = \ln(2 \times 3 \times \dots \times k \times (k+1)) = \ln((k+1)!)$ .

**Ö1.7** (a) Förenkla:  $\int_a^b f(x)dx - 2 \int_a^b f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$ .

(b)  $\int_a^c 3f(x)dx - \int_b^c f(x)dx - 2 \int_b^c f(x)dx = \int_a^c 3f(x)dx - 3 \int_b^c f(x)dx = \int_a^b 3f(x)dx$ .

(c)  $\int_2^5 f(x)dx - 2 \int_0^5 f(x)dx - 2 \int_0^2 f(x)dx = \int_2^5 f(x)dx - 2 \int_0^2 f(x)dx - 2 \int_2^5 f(x)dx - 2 \int_0^2 f(x)dx = -4 \int_0^2 f(x)dx - 2 \int_2^5 f(x)dx$ .

(d)  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)dx + \int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_{-\pi}^0 f(x)dx + 2 \int_0^{\pi/2} f(x)dx$ .

**Ö1.8** (a) Eftersom  $2x$  är udda och integralen är över ett symmetriskt intervall blir  $\int_{-3}^3 2x dx = 0$ . Integralen av 1 från  $-3$  till  $3$  blir basen gången höjden i en rektangel, alltså  $6 \cdot 1 = 6$ .

(b)  $f(-t) = -t \cos(-t) = -t \cos t = -f(t)$ , funktionen är alltså udda och av integralens egenskaper följer att  $\int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt = 0$ .

(c) Skriv som  $\int_{-a}^a -x dx = 0$  eftersom  $-x$  är en udda funktion.

(d) Funktionen är udda:  $f(-x) = a^{-x} - a^x = -f(x)$ , och integralen blir därför 0.

**Ö1.9** (a)  $\int_1^6 \frac{1}{t} dt = \ln 6$ .

(b)  $\int_{0.5}^1 \frac{1}{t} dt = - \int_1^{0.5} \frac{1}{t} dt = - \ln 0.5 = \ln 2$ .

(c)  $\int_2^5 \frac{1}{t} dt = \int_1^5 \frac{1}{t} dt - \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln 5 - \ln 2 = \ln 2.5$ .

(d)  $\int_{0.1}^{10} \frac{1}{t} dt = \int_1^{10} \frac{1}{t} dt - \int_1^{0.1} \frac{1}{t} dt = \ln 10 - \ln 0.1 = \ln 100$ .

**Ö1.10** (a) Kurvan beskriver en halvcirkel med radie 4, arean blir  $A = \pi r^2/2 = 8\pi$ .

(b)  $f(-x) = |-2x| = |2x| = f(x)$ , funktionen är därför jämn. Arean ges av  $2bh/2 = 2k^2$ .

(c) Skriv som  $\int_{-3}^3 v^3 + 5v dv + \int_{-3}^3 6 dv$ . Den första integralen blir 0 eftersom funktionen är udda, den andra kan tolkas som en kvadrat med area  $6(3 - (-3)) = 36$ .

(d) Dela upp integralen enligt  $\int_1^5 x dx - \int_1^3 |x-3| dx - \int_3^5 |x-3| dx = \int_0^5 x dx - \int_0^1 x dx - \int_1^3 3 - x dx - \int_3^5 x - 3 dx$ . Tolka som trianglar:  $A = \frac{5^2 - 1^2 - (3-1)^2 - (5-3)^2}{2} = 8$ .

**Ö1.11** (a) För  $I_{\min}$  blir summan  $\sum_{i=1}^n (1 + 4\frac{i-1}{n} - 2) \times \frac{4}{n} = \dots = 4 - \frac{8}{n}$ . För  $I_{\max}$  blir summan  $\sum_{i=1}^n (1 + 4\frac{i}{n} - 2) \times \frac{4}{n} = \dots = 4 + \frac{8}{n}$ . Då  $n \rightarrow \infty$  blir  $I_{\min} = I_{\max} = 4$ .

(b) För såväl  $I_{\min}$  som  $I_{\max}$  blir summan  $\sum_{i=1}^n k \frac{b-a}{n} = k(b-a)$ .

(c) För  $I_{\min}$  blir summan  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{a(i-1)}{n} - a\right) \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i - n - 1 = -\frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . För  $I_{\max}$

blir summan  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{ai}{n} - a\right) \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i - n = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{n} - 1\right)$ . Då  $n \rightarrow \infty$  blir  $I_{\min} = I_{\max} = -a^2/2$ .

(d) För  $I_{\min}$  blir summan  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2-2i+1}{n^3} = \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{6n} - \frac{1}{n}$ . För  $I_{\max}$  blir summan  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{6n}$ . Då  $n \rightarrow \infty$  blir  $I_{\min} = I_{\max} = 1/3$ .

**Ö1.12** (a) Integralens värde ges av arean som bildas av kurvan:  $\int_0^3 2x dx = 6 \times 3/2 = 9$ . Medelvärde ges av  $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3-0} 9 = 3$ .

(b) Kurvan bildar en halvcirkel med arean  $2\pi$ . Medelvärde ges av  $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2-(-2)} 2\pi = \pi/2$ .

(c) Arean tas fram genom indelning av området i trianglar och rektanglar, t.ex. som  $2^2 + 2^2/2 + 4^2/2 = 14$ . Medelvärde ges av  $\bar{f} = \frac{1}{6-0} 14 = \frac{7}{3}$ .

(d)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ . Funktionen är antisymmetrisk på intervallet med symmetrilinje  $x = \frac{\pi}{2}$ , därför blir integralen 0. Medelvärde  $\bar{f} = 0$ .

**Ö1.13** (a)  $\frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}$  med integralen  $4 - \ln 5$ . Medelvärde blir  $\bar{f} = 1 - \frac{\ln 5}{4}$ .

(b) Integralen blir  $\frac{1}{2} \left( \int_1^a \frac{1}{u} du - \int_1^{1/a} \frac{1}{u} du \right) = \frac{1}{2} (\ln a + \ln a) = \ln a$ . Medelvärde  $\bar{f} = \frac{1}{a-1/a} \ln a = \frac{a \ln a}{a^2-1}$ .

(c)  $f = \frac{1}{k}(1/v + v)$ ,  $\int_1^k f(v) dv = \frac{1}{k} (\ln k + (k^2 - 1^2)/2)$ .  $\bar{f} = \frac{1}{k(k-1)} (\ln k + (k^2 - 1)/2) = \frac{\ln k}{k(k-1)} + \frac{k+1}{2k}$ .

(d)  $f = \left| \frac{1}{w} - \frac{1}{2} \right|$ ,  $\int_1^{11} f(w) dw = \int_1^2 \frac{1}{w} - \frac{1}{2} dw + \int_2^{11} \frac{1}{2} - \frac{1}{w} dw$ . Konstanttermerna motsvarar rektanglar med det totala bidraget  $1/2 \times (9 - 1) = 4$ .  $\int_1^2 \frac{1}{w} dw - \int_2^{11} \frac{1}{w} dw = \int_1^2 \frac{1}{w} dw - \int_1^{11} \frac{1}{w} dw + \int_1^2 \frac{1}{w} dw = 2 \ln 2 + \ln 11 = \ln 4/11$ . Det totala värdet på integralen blir  $4 + \ln 4/11$  och medelvärde  $\bar{f} = \frac{4 + \ln 4/11}{10}$ .

**Ö1.14** (a)  $\bar{f} = \frac{1}{3-(-2)} \int_{-2}^3 \frac{4-x}{3} dx = \frac{1}{3-(-2)} \left( \frac{4-3}{3} + \frac{4-(-2)}{3} \right) / 2 \times (3 - (-2)) = \frac{7}{6}$ .  $c = f^{-1}(\bar{f}) = 4 - 3\bar{f} = 4 - 3 \times \frac{7}{6} = \frac{1}{2}$ .

(b) Arean av en halvcirkel  $\frac{\pi r^2}{2}$  med medelvärde  $\bar{f} = \frac{1}{2r} \times \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r}{4}$ . Ekvationen  $\sqrt{r^2 - c^2} = \frac{\pi r}{4}$  ger  $c = \pm \frac{r}{4} \sqrt{16 - \pi^2}$ .

(c) Med hjälp av Riemannsummor:  $\int_0^a 3x^2 dx = a^3$ .  $\bar{f} = \frac{1}{a} a^3 = a^2$ . Ekvationen  $3c^2 = a^2$  ger  $c = a/\sqrt{3}$ .

(d)  $\int_{-a}^a kx^2 dx = 2 \int_0^a kx^2 dx$ . Med hjälp av Riemannsummor:  $2 \int_0^a kx^2 dx = \frac{2ka^3}{3}$ .  $\bar{f} = \frac{1}{2a} \frac{2ka^3}{3} = \frac{ka^2}{3}$ . Ekvationen  $kc^2 = \frac{ka^2}{3}$  ger  $c = \pm a/\sqrt{3}$ .

**Ö1.15** (a)  $\int_2^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}$ .

(b)  $\int_1^5 \frac{1}{t^2} dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^5 = -1/5 - (-1/1) = 4/5$ .

(c)  $\int_{1/2}^1 \frac{x^6-3}{x^3} dx = \left[ \frac{x^4}{4} - 3 \times \frac{x^{-2}}{-2} \right]_{1/2}^1 = \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2x^2} \right]_{1/2}^1 = \frac{1^4}{4} + \frac{3}{2 \times 1^2} - \left( \frac{(1/2)^4}{4} + \frac{3}{2 \times (1/2)^2} \right) = \dots = -\frac{273}{64}$ .

(d)  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4} dt = \left[ -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2(-1)^2} + \frac{1}{3(-1)^3} + \frac{1}{2(-2)^2} - \frac{1}{3(-2)^3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$



$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Ö1.16 (a)} \int_0^9 u^{1.5} du = \left[ 2 \frac{u^{2.5}}{5} \right]_0^9 = 2 \frac{9^2 \sqrt{9}}{5} - 2 \frac{0^2 \sqrt{0}}{5} = \frac{486}{5}.$$

$$(b) \int_1^4 v^{-0.5} + 1 dv = [2\sqrt{v} + v]_1^4 = 2\sqrt{4} + 4 - (2\sqrt{1} + 1) = 5$$

$$(c) \int_8^{27} \sqrt[3]{w} dw = \left[ \frac{3}{4} \times w^{4/3} \right]_8^{27} = \frac{3}{4} \times 27^{4/3} - \left( \frac{3}{4} \times 8^{4/3} \right) = \frac{195}{4}.$$

$$(d) \int_0^t \sqrt[k]{x} dx = \frac{t^{1/k+1}}{1/k+1} = \frac{kt^{1/k}t}{1+k} = \frac{k}{k+1} t \sqrt[k]{t}.$$

$$\text{Ö1.17 (a)} \int_0^\pi 2 \cos \theta + \sin 2\theta d\theta = [2 \sin \theta - \frac{\cos 2\theta}{2}]_0^\pi = 2 \sin \pi - \frac{\cos 2\pi}{2} - (2 \sin 0 - \frac{\cos 2 \times 0}{2}) = 0 - 1/2 - 0 + 1/2 = 0.$$

$$(b) \int_\pi^{3\pi/2} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - 1 d\phi = \left[ 3 \sin\left(\frac{\phi}{3}\right) - \phi \right]_\pi^{3\pi/2} = 3 \sin\left(\frac{3\pi/2}{3}\right) - \frac{3\pi}{2} - (3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \pi) = 3 - \frac{3\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \pi = 3 - \frac{3\sqrt{3} + \pi}{2}.$$

$$(c) \int_{\frac{\pi}{4a}}^{\frac{5\pi}{4a}} \frac{\sin 2av}{2} dv = \left[ -\frac{\cos 2av}{4a} \right]_{\frac{\pi}{4a}}^{\frac{5\pi}{4a}} = -\frac{\cos 2a \frac{5\pi}{4a}}{4a} - \left( -\frac{\cos 2a \frac{\pi}{4a}}{4a} \right) = \frac{-\cos 10\pi + \cos \pi/2}{4a} = -\frac{1}{4a}.$$

$$(d) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin^2 u du = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2} du = 2 \left[ \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Ö1.18 (a)} \int_0^2 e^{3x} dx = \left[ \frac{e^{3x}}{3} \right]_0^2 = \frac{e^{3 \times 2}}{3} - \frac{e^{3 \times 0}}{3} = \frac{e^6 - 1}{3}.$$

$$(b) \int_4^6 \frac{2^x}{5} dx = \left[ \frac{2^x}{5 \ln 2} \right]_4^6 = \frac{2^6}{5 \ln 2} - \frac{2^4}{5 \ln 2} = \frac{48}{\ln 32}.$$

$$(c) \int_{-1}^{\frac{1}{2}} 9^x dx = \left[ \frac{9^x}{\ln 9} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{9^{\frac{1}{2}}}{\ln 9} - \frac{9^{-1}}{\ln 9} = \frac{26}{9 \ln 9} = \frac{13}{9 \ln 3}.$$

$$(d) \int_1^4 e^{\frac{x-3}{2}} dx = \left[ 2e^{\frac{x-3}{2}} \right]_1^4 = 2e^{\frac{4-3}{2}} - 2e^{\frac{1-3}{2}} = 2 \left( \sqrt{e} - \frac{1}{e} \right).$$

$$\text{Ö1.19 (a)} \int_1^{e^2} \frac{2}{t} dt = [2 \ln t]_1^{e^2} = 2 \ln e^2 - 2 \ln 1 = 4.$$

$$(b) \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{x^2+9} dx = \left[ \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \right]_{\sqrt{3}}^3 = \frac{1}{3} \arctan(1) - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (\pi/4 - \pi/6)/3 = \pi/36.$$

$$(c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \left[ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-1}^1 = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$(d) \int_1^2 t^6 + \frac{7}{t} dt = \left[ \frac{t^7}{7} + 7 \ln t \right]_1^2 = \frac{2^7}{7} + 7 \ln 2 - \left( \frac{1^7}{7} + 7 \ln 1 \right) = \frac{128-1}{7} + \ln 128 - 0 = \frac{127}{7} + \ln 128.$$

$$\text{Ö1.20 (a)} \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} t dt = \cos x \times (-\sin x) - \sin x \times \cos x = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x.$$

$$(b) \frac{d}{dx} \int_{\ln x}^x e^t dt = e^x \times 1 - e^{\ln x} \times \frac{1}{x} = e^x - 1.$$

$$(c) \frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^2} \frac{t}{1-t} dt = \frac{x^2}{1-x^2} \times 2x - \frac{2x}{1-2x} \times 2 = \frac{4x}{2x-1} - \frac{2x^3}{x^2-1}.$$

$$(d) \frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1-t^2}{t} dt = \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} \times \cos x - \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} \times (-\sin x) = \frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x} = \cos^2 x \cot x + \sin^2 x \tan x.$$

$$\text{Ö1.21 (a)} \int_1^\infty x^{-3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{-x^{-2}}{2} \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-R^{-2}}{2} - \left( \frac{-1^{-2}}{2} \right) = 1/2.$$

$$(b) \int_1^\infty \frac{1}{t-\sqrt{t}+1} dt > \int_1^\infty \frac{1}{t} dt = \infty. \text{ Integralen divergerar mot } \infty.$$

$$(c) \int_1^\infty \frac{2x+1}{x^2} dx > \int_1^\infty \frac{2}{x} dx = \infty. \text{ Integralen divergerar.}$$

$$(d) \int_1^\infty \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{-2}{t} - \frac{1}{2t^2} \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-2}{R} - \frac{1}{2R^2} - \left( \frac{-2}{1} - \frac{1}{2 \times 1^2} \right) = 5/2.$$

- Ö1.22** (a)  $\int_0^1 x^{-3/2} dx$  divergerar till  $\infty$  enligt satsen om p-integraler,  $p \geq 1$ .  
 (b)  $\int_0^4 x^{-1/2} dx = \frac{4^{1-1/2}}{1-1/2} = 4$ .  
 (c)  $\int_0^\infty x^{-p} dx = \int_0^1 x^{-p} dx + \int_1^\infty x^{-p} dx$ . Om  $p = 1$  divergerar båda termerna mot  $\infty$ . Om  $0 < p < 1$  divergerar den andra termen mot  $\infty$ . Om  $p > 1$  divergerar den första termen mot  $\infty$ . I samtliga fall divergerar integralen mot  $\infty$ .  
 (d)  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x \cos x} dx > \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x \times 1} dx = \infty$ .

- Ö1.23** (a)  $\int_0^1 \frac{t^2}{t^4+2} dt + \int_1^\infty \frac{t^2}{t^4+2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^2}{2} dt + \int_1^\infty \frac{t^2}{t^4} dt = \frac{7}{6}$ . Integralen konvergerar mot ett värde på högst  $\frac{7}{6}$ .  
 (b)  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt + \int_1^\infty e^{-t} dt = 1 + 1/e$ . Integralen konvergerar mot ett värde på högst  $1 + 1/e$ .  
 (c)  $\int_0^1 \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt \leq \int_0^1 \frac{t}{t\sqrt{t}} dt = 2$ . Integralen konvergerar mot ett värde på högst 2.  
 (d)  $\int_0^2 t^2 dt = \infty$ . Integralen divergerar mot  $\infty$ .

- Ö1.24** (a)  $\int_0^\infty k^{-u} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{-k^{-u}}{\ln k} \right]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k^{-R}}{\ln k} - \left( \frac{-k^{-0}}{\ln k} \right) = \frac{1}{\ln k}$ .  
 (b)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+s^2} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{s}{2} \right) \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{R}{2} \right) - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{-R}{2} \right) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$ .  
 (c)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3-v^2}} dv = \lim_{y \rightarrow \sqrt{3}^-} \left[ \arcsin \left( \frac{v}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^y = \lim_{y \rightarrow \sqrt{3}^-} \arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{3}} \right) - \arcsin \left( \frac{0}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2}$ .  
 (d)  $\int_1^\infty \frac{\ln w}{w} dw \geq \int_e^\infty \frac{\ln w}{w} dw \geq \int_e^\infty \frac{1}{w} dw = \infty$ . Integralen divergerar mot  $\infty$ .

- Ö1.25** (a)  $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{x} dx < \int_{-1}^0 \frac{e^x}{x} dx \leq \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx = -\infty$ . Integralen divergerar mot  $-\infty$ .  
 (b)  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin \sqrt{x}} dx \geq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx \geq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} dx = \infty$ . Integralen divergerar mot  $\infty$ .  
 (c)  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+e^x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx = 2 + 1/e$ . Integralen konvergerar mot ett värde på högst  $2 + 1/e$ .  
 (d)  $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = 2$ . Integralen konvergerar mot ett värde på högst 2.

## Problem

- P1.1** Låt  $S_n = \sum_{i=1}^n i^2$ . Tipset ger  $\sum_{i=1}^n (i+1)^3 - i^3 = (n+1)^3 - 1 := VL$  och  $\sum_{i=1}^n 3i^2 + 3i + 1 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + n = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + n := HL$ , där vi använder att  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ . När vi sätter HL=VL får vi,  $(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + n$  eller efter omskrivning  $S_n = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n}{3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

- P1.2** I fallet  $n = 1$  får vi  $1 = 1$ . Vi antar att relationen gäller för  $n - 1$ . Vi får då

$$\left( \sum_{i=1}^n i \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^{n-1} i + n \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^{n-1} i \right)^2 + 2n \sum_{i=1}^{n-1} i + n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^3 + \frac{2n^2(n-1)}{2} + n^2 = \sum_{i=1}^n i^3.$$

Resultatet följer genom induktion.

- P1.3** Sätt derivatan  $= 0$  för att få extrempunkten  $x = 2/3$ , här vänder funktionen.  $x_i = i/3$ . Bestäm funktionsvärdena  $f(x_0) = 0, f(x_1) = -\frac{2}{27}, f(x_2) = -\frac{4}{27}, f(x_3) = 0$ .  $I_{\min} = (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))/3 = -\frac{10}{81}$ .  $I_{\max} = (f(x_0) + f(x_1) + f(x_3))/3 = -\frac{2}{81}$ .
- P1.4** Låt  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Vi lägger till en punkt  $x_{i-1} < \hat{x} < x_i$  mellan två punkter  $x_{i-1} < x_i$  och kallar den nya partitionen  $\hat{P}$ . Då får vi att Riemannsummorna  $I_{\min}(f, P)$  och  $I_{\min}(f, \hat{P})$  får samma bidrag förutom från intervallet  $[x_{i-1}, x_i]$ . Från detta intervall blir bidraget till  $I_{\min}(f, P)$   $(x_i - x_{i-1})f_{\min}^i$  där  $f_{\min}^i$  är  $f$ 's minsta värde på intervallet. Bidraget till  $I_{\min}(f, \hat{P})$  blir istället  $(x_i - \hat{x})\hat{f}_{\min}^i + (\hat{x} - x_{i-1})\hat{f}_{\min}^{i-1}$  där  $\hat{f}_{\min}^i, \hat{f}_{\min}^{i-1} \geq f_{\min}^i$ , eftersom  $f_{\min}^i$  är  $f$ 's minsta värde på hela intervallet. Därför blir får vi att  $I_{\min}(f, \hat{P}) \geq I_{\min}(f, P)$ .
- P1.5** För en udda funktion  $f$  gäller att  $f(-x) = -f(x)$  och för en jämn  $f(x) = f(-x)$ . Vi använder integralens egenskaper för att dra slutsatsen  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) + f(x) dx$ . Om  $f$  är udda blir integralen 0 och om  $f$  är jämn blir den  $2 \int_0^a f(x) dx$ .
- P1.6** Låt  $I_{ac} = \int_a^c f(x) dx$  och  $I_{cb} = \int_c^b f(x) dx$ . Då finns partitioner  $P'$  av  $[a, c]$  och  $P''$  av  $[c, b]$  så att  $I_{\min}(f, P') \leq I_{ac} \leq I_{\min}(f, P') + \epsilon/2$  och  $I_{\min}(f, P'') \leq I_{cb} \leq I_{\min}(f, P'') + \epsilon/2$  för alla  $\epsilon > 0$ . Låt  $P$  vara den partition av  $[a, b]$  som bildas genom att lägga ihop punkterna i  $P'$  och  $P''$ . Då gäller  $I_{\min}(f, P) = I_{\min}(f, P') + I_{\min}(f, P'') \leq I_{ac} + I_{cb} \leq I_{\min}(f, P) + \epsilon$ . Dessutom gäller motsvarande för  $I_{\max}$  med samma argument  $I_{\max}(f, P)$  och därför måste  $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .
- P1.7** Vi har  $(\int_0^1 x^n dx)^2 = \frac{1}{(n+1)^2}$  och  $\int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$ . Eftersom  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2n + 1$  gäller att  $(\int_0^1 f(x) dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx$ .
- P1.8** Vi deriverar ekvationen och får  $f'(x) = -2f(x)$ . Enligt exponentialfunktionens definition har vi att  $f(x) = Ce^{-2x}$ . Vi låter nu  $x = 0$  i den ursprungliga ekvationen och får  $f(0) = 2$ , alltså  $f(x) = 2e^{-2x}$ .
- P1.9**  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^2} dt \geq \int_0^{\pi/2} \frac{\pi t/2}{t^2} dt = \infty$ . Integralen divergerar mot  $\infty$ .
- P1.10** Eftersom  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x/2} = 0$  för alla  $n$  finns det något  $C$  sådant att  $x^n e^{-x/2} \leq 1$  då  $x > C$ . Därför får vi  $0 \leq \int_C^\infty x^n e^{-x} dx \leq \int_C^\infty e^{-x/2} dx = 2e^{-C/2}$ . Dessutom gäller  $\int_0^C x^n e^{-x} dx \leq \int_0^C x^n dx = \frac{C^{n+1}}{n+1}$ . Integralen är alltså konvergent eftersom integranden kan begränsas av funktionen  $g(x) = x^n$  på intervallet  $[0, C]$  och  $g(x) = e^{-x/2}$  på intervallet  $[C, \infty)$  och  $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$  är konvergent.

## Övningar

$$\text{Ö2.1 (a)} \int_1^2 \sqrt{x-1} dx = \left\{ u = x-1, u(1) = 0, u(2) = 1, \frac{du}{dx} = 1 \right\} = \int_0^1 \sqrt{u}/1 du = \left[ \frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{1^{3/2}}{3/2} - \left( \frac{0^{3/2}}{3/2} \right) = 2/3.$$

$$\text{(b)} \int_0^2 2xe^{x^2} dx = \left\{ u = x^2, u(0) = 0, u(2) = 4, \frac{du}{dx} = 2x \right\} = \int_0^4 2xe^u/2x du = [e^u]_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1.$$

$$\text{(c)} \int_0^\pi \cos(x)^2 dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{(d)} \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = \left\{ u = \ln x, u(1) = 0, u(e) = 1, \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \right\} = \int_0^1 \frac{2u}{x} / \frac{1}{x} du = [u^2]_0^1 = 1.$$

$$\text{Ö2.2 (a)} \int_1^4 \frac{\cos(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx = \left\{ u = \sqrt{x}-1, u(1) = 0, u(4) = 1, \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right\} = \int_0^1 \frac{\cos(u)}{\sqrt{x}} / \frac{1}{2\sqrt{x}} du = [2 \sin u]_0^1 = 2 \sin 1 - 2 \sin 0 = 2 \sin 1.$$

$$\text{(b)} \int_0^{3\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_0^{3\pi/2} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \left\{ u = \sin x, u(0) = 0, u(3\pi/2) = -1, \frac{du}{dx} = \cos x \right\} = \int_0^{-1} u^2(1-u^2) du = [u^3/3 - u^5/5]_0^{-1} = -\frac{2}{15}.$$

$$\text{(c)} \int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{2}{\tan 2x} dx = \int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} dx =$$

$$= \left\{ u = \sin 2x, u(\pi/12) = 1/2, u(\pi/4) = 1, \frac{du}{dx} = 2 \cos 2x \right\} = \int_{1/2}^1 \frac{2 \cos 2x}{u} / 2 \cos 2x du = [\ln u]_{1/2}^1 = \ln 1 - \ln 1/2 = \ln 2.$$

(d)

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{-1}{(x^2+1)(\arctan x)^2} dx = \left\{ u = \arctan x, u(1) = \pi/4, u(\sqrt{3}) = \pi/3, \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \right\} \quad (22)$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{-1}{(x^2+1)(u)^2} / \frac{1}{1+x^2} du = \left[ \frac{1}{u} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{\pi/3} - \left( \frac{1}{\pi/4} \right) = -\frac{1}{\pi}. \quad (23)$$

Ö2.3 (a)

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \left\{ x = 3 \cos \theta, \frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta, -3 = 3 \cos \pi, 3 = 3 \cos 0 \right\} \quad (24)$$

$$= \int_\pi^0 \sqrt{9 - (3 \cos \theta)^2} (-3 \sin \theta) d\theta \quad (25)$$

$$= \int_\pi^0 -9 \sin^2 \theta d\theta = \left[ \frac{-9\theta}{2} - \frac{9 \sin(2\theta)}{4} \right]_\pi^0 = \frac{9\pi}{2}. \quad (26)$$

$$\text{(b)} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \left\{ x = 2 \sin \theta, \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta, 0 = \theta(0), \sqrt{2} = \theta(\pi/4) \right\} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{4-(2 \sin \theta)^2}} \times 2 \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/4} 1 d\theta = [\theta]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{(c)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-3x^2)^{3/2}} dx = \left\{ x = \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}}, \frac{dx}{d\theta} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}, 0 = \theta(0), \frac{1}{2} = \theta(\pi/3) \right\} = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{(1-3(\frac{\sin \theta}{\sqrt{3}})^2)^{3/2}} \times \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} d\theta = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{3} \cos^2 \theta} d\theta = \left[ \frac{\tan \theta}{\sqrt{3}} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\tan \pi/3}{\sqrt{3}} = 1.$$

$$(d) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx = \left\{ x = 2 \tan \theta, \frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta}, 0 = \theta(0), 2 = \theta\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{4+(2 \tan \theta)^2}} \times \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \left[ \ln\left(\frac{1+\sin \theta}{\cos \theta}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\frac{1+\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}}\right) - \ln\left(\frac{1+\sin 0}{\cos 0}\right) = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

**Ö2.4** (a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \left[ \frac{x \sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{\frac{\pi}{2} \sin \pi}{2} - \left[ -\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{\cos \pi}{4} - \frac{\cos 0}{4} = -\frac{1}{2}.$   
 (b)  $\int_1^{10} t \ln t dt = \left[ \frac{t^2 \ln t}{2} \right]_1^{10} - \int_1^{10} \frac{t}{2} dt = \frac{10^2 \ln 10}{2} - \frac{1^2 \ln 1}{2} - \left[ \frac{t^2}{4} \right]_1^{10} = 50 \ln 10 - \frac{10^2}{4} + \frac{1^2}{4} = 50 \ln 10 - \frac{99}{4}.$   
 (c)  $\int_1^e \ln t dt = [t \ln t]_1^e - \int_1^e 1 dt = e - [t]_1^e = 1.$   
 (d)  $\int_0^2 x \arctan x dx = \left[ \frac{x^2 \arctan x}{2} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2+2x^2} dx = 2 \arctan 2 - \frac{1}{2} \int_0^2 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan 2 - \frac{1}{2} [x - \arctan x]_0^2 = \frac{5}{2} \arctan 2 - 1.$

**Ö2.5** (a) Partiell integration två gånger.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin 3x dx = \left[ -\frac{x^2 \cos 3x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2x \cos 3x}{3} dx = \frac{\pi^2}{27} - \left( \left[ -\frac{2x \sin 3x}{9} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2 \sin 3x}{9} dx \right) = \frac{\pi^2}{27} + 0 - \left[ \frac{2 \cos 3x}{27} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{27} - \frac{4}{27}.$   
 (b)  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx = [e^x \sin x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4} - e^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - \left( [-e^x \cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -e^x \cos x dx \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - I.$   
 Integralen vi började med återkommer.  $2I = \sqrt{2}e^{\pi/4}, I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}.$   
 (c)  $\int \sin \ln x dx = x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx = x \sin \ln x - x \cos \ln x + \int \sin \ln x dx.$   $I$  återkommer.  
 $I = \frac{x(\sin \ln x - \cos \ln x)}{2} + C.$   
 (d) Notera att med  $I_n = \int e^{ax} x^n dx$  blir reduktionsformeln  $I_n = \frac{e^{ax} x^n}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}.$   $I_0 = \frac{e^{ax}}{a} + C_0.$   
 Vi kan nu iterera reduktionsformeln och erhålla  $I_1 = \frac{e^{ax} x}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C_1, I_2 = \frac{e^{ax} x^2}{a} - \frac{2e^{ax} x}{a^2} + \frac{2e^{ax}}{a^3} + C_2$  etc., tills vi får  $I_5 = e^{ax} \left( \frac{x^5}{a} - \frac{5x^4}{a^2} + \frac{20x^3}{a^3} - \frac{60x^2}{a^4} + \frac{120x}{a^5} - \frac{120}{a^6} \right) + C.$

**Ö2.6** (a)  $\int \frac{3}{1-2x} dx = \int \frac{-3}{2x-1} dx = -\frac{3}{2} \ln |2x-1| + C.$   
 (b)  $\int \frac{2}{(x+2)(x-2)} dx = \int \frac{x^2-2}{x^2-2^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$   
 (c)  $\int \frac{dx}{bx^2+1} = \int \frac{1/b}{x^2+(1/\sqrt{b})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan(\sqrt{b}x).$   
 (d)  $\int \frac{x+1}{x^2+9} dx = \int \frac{x}{x^2+3^2} + \frac{1}{x^2+3^2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+9| + \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C.$

**Ö2.7** (a)  $\int \frac{x+2}{x^2+x} dx = \int \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x} dx = 2 \ln x - \ln |x+1| + C.$   
 (b)  $\int \frac{1}{x^3+4x} dx = \int \frac{-x}{4x^2+16} + \frac{1}{4x} dx = -\frac{1}{8} \ln(x^2+4) + \frac{\ln|x|}{4} + C.$   
 (c)  $\int \frac{1}{(2x-3)^2} dx = \left\{ u = 2x-3, \frac{du}{dx} = 2 \right\} = \int \frac{1}{u^2} / 2 du = -\frac{1}{2u} + C = \frac{1}{6-4x} + C.$   
 (d)  $\int \frac{x-1}{(x-3)^2} dx = \int \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} dx = \ln |x-3| - \frac{2}{x-3} + C.$

**Ö2.8** (a)  $\int \frac{x-1}{x-2} dx = \int 1 + \frac{1}{x-2} dx = x + \ln |x-2| + C.$   
 (b)  $\int \frac{x^3-1}{x-2} dx = \int x^2 + 2x + 4 + \frac{7}{x-2} dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 7 \ln |x-2| + C.$   
 (c)  $\int \frac{x^2-x+6}{(x-2)^2} dx = \int 1 + \frac{3x+2}{(x-2)^2} dx = \int 1 + \frac{3}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2} dx = x + 3 \ln |x-2| + \frac{8}{2-x} + C.$   
 (d)  $\int \frac{2x^4+3x^3-x^2-8x+3}{x^2-3} dx = \int 2x^2 + 3x + 5 + \frac{x+18}{x^2-3} dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x + \frac{1}{2} \ln |x^2-3| +$

$$3\sqrt{3} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C.$$

- Ö2.9** (a)  $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \arctan(x+1) + C.$   
 (b)  $\int \frac{x}{x^2-4x+8} dx = \int \frac{(x-2)+2}{(x-2)^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln |(x-2)^2+4| + \frac{2}{2} \tan^{-1} \frac{x-2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln |x^2-4x+8| + \tan^{-1} \frac{x-2}{2} + C.$   
 (c)  $\int \frac{1}{x^2+5x+6} dx = \int \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx = \int \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} dx = \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C.$   
 (d)  $\int \frac{4x^2-10x+9}{x^3-8x^2+25x-26} dx = \int \frac{1}{(x-2)((x-3)^2+4)} dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{3(x-3)+11}{(x-3)^2+4} dx = \ln |x-2| + \frac{3}{2} \ln |x^2-6x+13| + \frac{11}{2} \arctan \frac{x-3}{2} + C.$

- Ö2.10** (a)  $\int \frac{2x^3-7x}{x^4-8x^2+16} dx = \int \frac{2x}{x^2-4} + \frac{x}{(x^2-4)^2} dx = \{u = x^2-4, \frac{du}{dx} = 2x\} = \ln |x^2-4| + \frac{1}{8-2x^2} + C.$   
 (b)  $\int \frac{2x^4-2x^3+8x^2-17x+51}{x^3-x^2-x-15} dx = \int 2x + \frac{9}{x-3} + \frac{x-2}{x^2+2x+5} dx = x^2 + 9 \ln |x-3| + \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$   
 (c)  $\int \frac{2x^3-2x^2+x+1}{(1-2x^2)^2} dx = \int \frac{x-1}{2x^2-1} + \frac{2x}{(2x^2-1)^2} dx = \frac{1}{4} \ln(2x^2-1) + \frac{1}{2-4x^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-1/\sqrt{2}}{x+1/\sqrt{2}} \right| + C.$   
 (d)  $\int \frac{x^3-5x^2+9x-5}{(x-2)^4} dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4} dx = \ln |x-2| - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-2)^3} + C.$

- Ö2.11** (a)  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} |x \sin(x^2)| dx = \{u = x^2, u(0) = 0, u(\sqrt{2\pi}) = 2\pi, \frac{du}{dx} = 2x\} = \int_0^{2\pi} |\sin(u)|/2 du = \int_0^{\pi} \sin(u)/2 du + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(u)/2 du = 2.$   
 (b)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left| \frac{x-1}{x} \right| dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-1}{x} dx + \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = \frac{1}{2}.$   
 (c)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos x \left( \frac{1}{2} - \sin^2 x \right) \right| dx = \left\{ u = \sin x, u\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \frac{du}{dx} = \cos x \right\} \quad (27)$$

$$= \int_{-1}^1 \left| \cos x \left( \frac{1}{2} - u^2 \right) \right| / \cos x du \quad (28)$$

$$= 2 \int_0^1 \left| \frac{1}{2} - u^2 \right| du = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{2} - u^2 du + 2 \int_{1/\sqrt{2}}^1 u^2 - \frac{1}{2} du = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1). \quad (29)$$

(d)  $\int_0^{2\pi} |x \sin x| dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx = 4\pi.$

- Ö2.12** (a)  $\frac{d}{dx} 3x + 1 = 3. \int_1^2 \sqrt{1+(3)^2} dx = [\sqrt{10}x]_1^2 = \sqrt{10}.$   
 (b)  $\frac{d}{dx} \frac{2x^{3/2}}{3} = \sqrt{x}. \int_{-1}^0 \sqrt{1+(\sqrt{x})^2} dx = \left[ \frac{2(1+x)^{1.5}}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{2(1+0)^{1.5}}{3} - \frac{2(1+(-1))^{1.5}}{3} = \frac{2}{3}.$   
 (c)  $\frac{d}{dx} kx = k. \int_0^b \sqrt{1+k^2} dx = \sqrt{1+k^2} b.$   
 (d)  $\frac{d}{dx} x\sqrt{4x} = 3\sqrt{x}. \int_0^{1/9} \sqrt{1+(3\sqrt{x})^2} dx = \left[ \frac{2(1+9x)^{1.5}}{9 \cdot 3} \right]_0^{1/9} = \frac{2 \times 2^{1.5}}{27} - \frac{2}{27} = \frac{4\sqrt{2}-2}{27}.$

- Ö2.13** (a)  $\frac{d}{dx} \ln x - \frac{x^2}{8} = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}. \int_1^3 \sqrt{1+(\frac{1}{x} - \frac{x}{4})^2} dx = \int_1^3 \sqrt{(\frac{1}{x} + \frac{x}{4})^2} dx = \left[ \ln x + \frac{x^2}{8} \right]_1^3 = \ln 3 + \frac{3^2}{8} - \ln 1 - \frac{1^2}{8} = \ln 3 + 1.$

$$(b) \frac{d}{dx} \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{8x} = 2x^2 - \frac{1}{8x^2}. \int_1^2 \sqrt{1 + (2x^2 - \frac{1}{8x^2})^2} dx = \int_1^2 2x^2 + \frac{1}{8x^2} dx = \left[ \frac{2x^3}{3} - \frac{1}{8x} \right]_1^2 = \frac{2 \times 2^3}{3} - \frac{1}{8 \times 2} - \frac{2 \times 1^3}{3} + \frac{1}{8 \times 1} = \frac{227}{48}.$$

$$(c) \frac{d}{dx} \frac{x^{3/2} - 12\sqrt{x}}{6} = \frac{\sqrt{x}}{4} - \frac{1}{\sqrt{x}}. \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{\sqrt{x}}{4} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2} dx = \left[ \frac{x^{3/2}}{6} + 2\sqrt{x} \right]_0^4 = \frac{4^{3/2}}{6} + 2\sqrt{4} = \frac{16}{3}.$$

$$(d) \frac{d}{dx} \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{2a} - a \ln x \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{x}{a} - \frac{a}{x} \right). \int_1^t \sqrt{1 + \left( \frac{x}{a} - \frac{a}{x} \right)^2} dx = \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{2a} + a \ln x \right) \right]_1^t = \frac{1}{4} \left( \frac{t^2}{2a} + a \ln t \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{1^2}{2a} + a \ln 1 \right) = \frac{t^2 - 1 + 2a^2 \ln t}{8a}.$$

**Ö2.14** (a)  $V = \int_0^3 (2y)^2 dy = \left[ \frac{4y^3}{3} \right]_0^3 = 36 \text{ cm}^3.$

(b) Radien på bottenarean är  $r = \sqrt{100/\pi} = 10/\sqrt{\pi} \text{ cm}^2$ .  $V = 2 \int_0^5 \pi \left( \frac{rx}{5} \right)^2 dx = 2 \frac{\pi r^2 5^3}{75} = \frac{1000}{3} \text{ cm}^3.$

(c) Kroppen har rektangulärt tvärsnitt  $x \times (h - x)$ .  $V = \int_0^h xh - x^2 dx = \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{6}.$

(d)  $\int_0^h \frac{z}{z^2+1} dz = \left[ \frac{1}{2} \ln(z^2 + 1) \right]_0^h = \frac{1}{2} \ln(h^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln(h^2 + 1).$

**Ö2.15** (a)  $\pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \frac{2^5}{5} = \frac{32\pi}{5}.$

(b)  $\pi \int_0^1 (x^2 + x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 + 2x^3 + x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \pi \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{31\pi}{30}.$

(c)  $\pi \int_0^{\pi/4} (\sin(x) - 1)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/4} \sin^2 x - 2 \sin x + 1 dx = \pi \left[ \frac{1}{2} (3x + 4 \cos x - \sin x \cos x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} (3 \frac{\pi}{4} + 4 \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - (0 + 4 \cos 0 - \sin 0 \cos 0)) = \frac{3\pi^2}{8} + \sqrt{2}\pi - \frac{9\pi}{4}.$

(d)  $\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{x}e^x)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \{\text{part. int.}\} = \pi \left[ \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \pi \left( \frac{1}{4} e^1 (2 \cdot \frac{1}{2} - 1) - \frac{1}{4} e^0 (0 - 1) \right) = \frac{\pi}{4}.$

**Ö2.16** (a)  $2\pi \int_1^e x \left( \frac{1}{x^2} \right) dx = 2\pi \int_1^e \frac{1}{x} dx = 2\pi [\ln x]_1^e = 2\pi (\ln e - \ln 1) = 2\pi.$

(b)  $2\pi \int_0^a x (\cos x^2) dx = \{u = x^2\} = 2\pi \int_{x=0}^{x=a} \frac{\cos u}{2} du = 2\pi \left[ \frac{\sin x^2}{2} \right]_0^a = 2\pi \left( \frac{\sin a^2}{2} \right) = \pi \sin a^2.$

(c)  $2\pi \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 2\pi \int_0^2 4x - x^3 dx = 2\pi \left[ 2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi (2 \times 2^2 - \frac{2^4}{4}) = 8\pi.$

(d)  $2\pi \int_1^3 \frac{x}{x^2+3} dx = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) \right]_1^3 = 2\pi \left( \frac{1}{2} \ln(3^2 + 3) - \frac{1}{2} \ln(1^2 + 3) \right) = \pi \ln 3.$

**Ö2.17** (a)  $\pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}.$

(b)  $2\pi \int_0^1 x(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 dx = 2\pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$

(c)  $2\pi \int_0^1 (x+2)(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 -x^3 - x^2 + 2x dx = 2\pi \left[ -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \frac{5\pi}{6}.$

(d)  $\pi \int_0^1 (2 - x^2)^2 - (2 - x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 - 5x^2 + 4x dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^1 = \pi \left( \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 2 \right) = \frac{8\pi}{15}.$

**Ö2.18** (a) Triangeln begränsas av  $y = \frac{3-x}{2}$ .  $2\pi \int_1^3 x \left( \frac{3-x}{2} \right) dx = 2\pi \left[ \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right]_1^3 = 2\pi \left( \frac{3 \times 3^2}{4} - \frac{3^3}{6} - \left( \frac{3 \times 1^2}{4} - \frac{1^3}{6} \right) \right) = \frac{10\pi}{3}.$

$$(b) 2\pi \int_{7/2}^{13/2} x \times 3dx = 2\pi \left[ \frac{3x^2}{2} \right]_{7/2}^{13/2} = 90\pi.$$

(c) Vi studerar övre halvan och multiplicerar med 2. Cirkeln begränsas av  $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$  och  $0 \leq x \leq 2$ . Volymen ges av  $2 \cdot 2\pi \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx = \{u = 4-x^2, du = -2xdx\} = 2\pi \int_0^4 u^{1/2} du = \frac{32\pi}{3}$ .

(d) Kurvan är  $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$  från  $y$ -axeln till 2, men integralen behöver multipliceras med 2 för att få med området under  $x$ -axeln.  $2\pi \int_0^2 2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = \{\text{substituera } u = 1 - x^2/4\} = 2\pi \left[ -\frac{8(1 - \frac{x^2}{4})^{1.5}}{3} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}$ .

**Ö2.19** (a)  $\Delta x = \frac{1}{2}$ .  $M_2 = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.75} \right) = \frac{24}{35} \approx 0.6857$ .

(b)  $\Delta x = \frac{1}{2}$ .  $T_2 = \frac{1}{2} \times \frac{(\frac{1}{1} + \frac{1}{3/2}) + (\frac{1}{3/2} + \frac{1}{2})}{2} = \frac{17}{24} \approx 0.7083$ .

(c)  $\Delta x = 1$ .  $S_1 = 1 \times \frac{1}{6} \left( \frac{1}{1} + 4 \frac{1}{1.5} + \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{36} \approx 0.6944$ .

(d)  $\Delta x = \frac{1}{2}$ .  $S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \left( \frac{1}{1} + 4 \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.5} + 4 \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1747}{2520} \approx 0.69325$ .

**Ö2.20** (a)  $T_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(0) + 2\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\pi)}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

(b)  $M_2 = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right) = \frac{5}{16}$ .

(c) Låt  $f(x) = x^2 - x^3$ . Vi har  $M_2 = \frac{1}{2}f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{32}$ .

(d)  $S_2 = \frac{1}{6 \times 2} (f(0) + 4f(1/4) + 2f(1/2) + 4f(3/4) + f(1)) = -\frac{3}{4}$ . Notera att Simpson är exakt för kubiska polynom.

**Ö2.21** (a)  $M_4 = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^4 \sin((i\pi)/2 - \pi/4) = 0$ .

(b)  $\Delta x = 2$ ,  $x_i = \{-1, 1, 3, 5\}$ .  $S_4 = 2 \frac{1}{6} ((-3)^2 + 4(-2)^2 + 2(-1)^2 + 4 \times 0^2 + 2 \times 1^2 + 4 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 4 \times 4^2 + 5^2) = \frac{152}{3}$ .

(c)  $S_4 = 1 \times \frac{1}{6} (\ln 1 + 4 \ln \frac{3}{2} + 2 \ln 2 + 4 \ln \frac{5}{2} + 2 \ln 3 + 4 \ln \frac{7}{2} + 2 \ln 4 + 4 \ln \frac{9}{2} + \ln 5) = \frac{1}{6} (\ln 5 + 2 \ln 24 + 4 \ln \frac{945}{16})$ .

(d)  $\Delta x = 8$ .  $T_4 = 8 \frac{1}{2} \left( \frac{8-16}{8} + 2 \frac{16-16}{16} + 2 \frac{24-16}{24} + 2 \frac{32-16}{32} + \frac{40-16}{40} \right) = \frac{76}{15}$ .

**Ö2.22** Hänsyn måste tas till intervallens olika längd.

(a)  $\frac{16-0}{2} \times (\sqrt{0} + \sqrt{16}) + \frac{64-16}{2} \times (\sqrt{16} + \sqrt{64}) = 320$ .

(b)  $\frac{4-0}{2} \times (\sqrt{0} + \sqrt{4}) + \frac{16-4}{2} \times (\sqrt{4} + \sqrt{16}) + \frac{64-16}{2} \times (\sqrt{16} + \sqrt{64}) = 328$ .

(c)  $\frac{1-0}{2} \times (\sqrt{0} + \sqrt{1}) + \frac{25-1}{2} \times (\sqrt{1} + \sqrt{25}) + \frac{64-25}{2} \times (\sqrt{25} + \sqrt{64}) = 326$ .

(d)  $\frac{16}{2} (\sqrt{0} + 2\sqrt{16} + 2\sqrt{32} + 2\sqrt{48} + \sqrt{64}) = 64(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 329.4$ .

**Ö2.23** (a)  $f''(x) = 12x^2$ .  $K = \max |f''(x)| = 3$ .  $|\int_0^{1/2} x^4 dx - T_1| \leq \frac{3(1/2-0)^3}{12 \times 1^2} = \frac{1}{32} = 0.03125$ .

(b)  $f^{(4)}(x) = 24$ .  $K = 24$ .  $|\int_0^{1/2} x^4 dx - S_1| \leq \frac{24(1/2-0)^5}{180 \times 1^4} = \frac{1}{240} \approx 0.00417$ .

(c)  $f''(x) = 12x^2$ .  $K = \max |f''(x)| = 3$ .  $|\int_0^{1/2} x^4 dx - M_1| \leq \frac{3(1/2-0)^3}{24 \times 1^2} = \frac{1}{64} \approx 0.01563$ .

(d)  $f''(x) = 12x^2$ .  $K = \max |f''(x)| = 3$ .  $|\int_0^{1/2} x^4 dx - T_2| \leq \frac{3(1/2-0)^3}{12 \times 2^2} = \frac{1}{128} \approx 0.00782$ .

**Ö2.24** Det exakta värdet är  $\int_0^{1/2} x^4 dx = \frac{1}{160} = 0.00625$ .

(a)  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (0 + (1/2)^4) = 0.015625$ .  $E \approx 0.00938$ .



- (b)  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} (0 + \frac{4}{4^4} + \frac{1}{2^4}) \approx 0.006510$ .  $E \approx 0.00026$ .  
 (c)  $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{4^4}) \approx 0.0019531$ .  $E \approx 0.00429$ . Ungefär halva felet i  $T_1$ .  
 (d)  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} (0 + \frac{2}{4^4} + \frac{1}{2^4}) \approx 0.008789$ .  $E \approx 0.00254$ . Ungefär en fjärdedel av felet i  $T_1$ .

- Ö2.25** (a)  $f''(x) = -2x^{-2}$ .  $K = \max |f''(x)| = -f(1) = 2$ .  $E \leq \frac{2(e-1)^3}{24 \times 3^2} = \frac{(e-1)^3}{216}$ .  
 (b)  $f^{(4)}(x) = -\sin x$ .  $K = \max |f^{(4)}(x)| = -f(\pi/2) = 1$ .  $E \leq \frac{1(\pi-0)^5}{2880 \times 2^4} = \frac{\pi^5}{46080}$ .  
 (c)  $f''(x) = -6x$ .  $K = \max |f''(x)| = -f(5) = 30$ .  $E \leq \frac{30(5-1)^3}{12 \times 4^2} = 10$ .  
 (d)  $f''(x) = 24 - 12x^2$ .  $K = \max |f''(x)| = f(1) = 12$ .  $E \leq \frac{12(2-0)^3}{24 \times 10^2} = \frac{1}{25}$ .

## Problem

**P2.1**  $I_0 = 1 - e^{-1}$  och partiell integration ger  $I_n = -e^{-1} + nI_{n-1}$ . Därför har vi att  $I_1 = -e^{-1} + I_0 = 1 - 2e^{-1}$ ,  $I_2 = -e^{-1} + 2I_1 = 2 - 5e^{-1}$  och  $I_3 = -e^{-1} + 3I_2 = 6 - 16e^{-1}$

**P2.2** Vi får med variabelsubstitutionen  $\bar{t} = t - \tau$ ,

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = - \int_t^0 f(t-\bar{t})g(\bar{t}) d\bar{t} = \int_0^t f(t-\bar{t})g(\bar{t}) d\bar{t}.$$

**P2.3** Vi låter funktionen  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  rotera kring  $x$ -axeln för  $-1 \leq x \leq 1$ . Vi har att  $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{f(x)}$ . Arean ges därför av  $S = 2\pi \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1+(x/f(x))^2} dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{f(x)^2 + x^2} dx = 4\pi$ .

**P2.4** Volymen ges av  $\pi \int_1^\infty x^{2\lambda} dx < \infty$  om  $\lambda < -\frac{1}{2}$  enligt satsen om  $p$ -integraler.

**P2.5** Det vinkelräta avståndet mellan origo och linjen är  $5/\sqrt{2}$ . Vi söker alltså volymen av en torus där ringen har radie 1 och avståndet från ringens centrum till torusens centrum är  $5/\sqrt{2}$ . Volymen ges (enligt exempel i boken) av  $2\pi^2 \cdot 1^2 \cdot 5/\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\pi^2$ .

**P2.6** Hörnen ligger i  $[2, 2]$ ,  $[2 - 2\sqrt{3}, 0]$  och  $[2 + 2\sqrt{3}, 0]$ . Triangeln delas i två halvor. Vänstra halvans bidrag ges av  $2\pi \int_{2-\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 x(\sqrt{3}x+2-2\sqrt{3})dx = 2\pi \left[ \frac{x^3}{3} + (1-\sqrt{3})x^2 \right]_{2-\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 = 2\pi \left( \frac{2^3}{3} + (1-\sqrt{3})2^2 - \left( \frac{(2-\frac{2}{\sqrt{3}})^3}{3} + (1-\sqrt{3})(2-\frac{2}{\sqrt{3}})^2 \right) \right) = \pi \left( \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{9} \right)$ . Högra halvans ger  $2\pi \int_2^{2+\frac{2}{\sqrt{3}}} x(-\sqrt{3}x+2+2\sqrt{3})dx = \pi \left( \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{8}{9} \right)$ . Summa  $\frac{16\pi}{\sqrt{3}}$ .

**P2.7** Låt  $x_i = i/n$ ,  $i = 0, \dots, n$  och  $x_{i+\frac{1}{2}} = (i+\frac{1}{2})/n$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Vidare låter vi  $y_j = f(x_j)$ . Då gäller  $T_n = \frac{1}{n} (\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n)$  och  $M_n = \frac{1}{n} (y_{\frac{1}{2}} + \dots + y_{n-\frac{1}{2}})$ . Samtidigt gäller att,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} \cdot (y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{1+\frac{1}{2}} + \dots + 4y_{n-\frac{1}{2}} + y_n) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} (y_{\frac{1}{2}} + \dots + y_{n-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{T_n + 2M_n}{3}. \end{aligned}$$

**P2.8** Vi har att  $I = \int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$ .  $T_2 = (t-1)\frac{1+t^3}{2} + (2-t)\frac{t^3+8}{2} > I$  för alla  $t$  eftersom funktionen har positivt andraderivata. Vi låter felet  $e(t) = T_2 - I$  och söker dess minimum. Vi får

$$0 = 2e'(t) = 1 + t^3 + (t-1)3t^2 - t^3 - 8 + (2-t)3t^2 = -7 + 3t^2,$$

vilket innebär att  $t = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ .

**P2.9** Trapetsmetoden approximerar  $f(x)$  med en linjen  $h^{-1}(f(0)(h-x) + f(h)x)$ . Låt det punktvisa felet betecknas  $e(x) = f(x) - h^{-1}(f(0)(h-x) + f(h)x)$ . Vi har att  $e(0) = e(h) = 0$  och att  $e''(x) = f''(x)$ . Vidare gäller  $\int_0^h f(x) dx - T_1 = \int_0^h e(x) dx$ . Vi noterar att två partiella integrationer ger

$$\int_0^h x(h-x)e''(x) dx = - \int_0^h (h-2x)e'(x) dx = 2 \int_0^h xe'(x) dx = -2 \int_0^h e(x) dx.$$

Alltså gäller

$$\left| \int_0^h f(x) dx - T_1 \right| = \left| \int_0^h e(x) dx \right| = \frac{1}{2} \left| \int_0^h x(h-x)e''(x) dx \right| \leq \frac{K}{2} \int_0^h x(h-x) dx = \frac{Kh^3}{12}.$$

**P2.10** Vi har att  $S_1 = \frac{b-a}{6} (a^3 + 0.5(a+b)^3 + b^3) = \frac{b-a}{4} (b^3 + b^2a + ba^2 + a^3) = \frac{b^4-a^4}{4} = \int_a^b x^3 dx$ .

## Kapitel 3

### Övningar

**Ö3.1** (a) Ordinär, ordning 1. (b) Partiell, ordning 2. (c) Ordinär, ordning 4.  
(d) Partiell, ordning 2.

**Ö3.2** (a) Partiell, ordning 1. (b) Ordinär, ordning 4. (c) Ordinär, ordning 2.  
(d) Partiell, ordning 2.

**Ö3.3** (a)  $u'' = -\cos(x)$ .  $u'' + u = \cos(x) - \cos(x) = 0$ . Funktionen är en lösning.  
(b)  $u'' = -9\sin(3x)$ .  $u'' + u = \sin(3x) - 9\sin(3x) = -8\sin(3x)$ . Funktionen är ej en lösning.  
(c)  $u'' = -2\cos(x) - 3\sin(x)$ .  $u'' + u = 2\cos(x) + 3\sin(x) - 2\cos(x) - 3\sin(x) = 0$ . Funktionen är en lösning.  
(d)  $u'' = -\sin(x-1)$ .  $u'' + u = \sin(x-1) - \sin(x-1) = 0$ . Funktionen är en lösning.

**Ö3.4** (a)  $f' = \frac{1}{(C-x)^2}$ ,  $\frac{1}{(C-x)^2} = \left(\frac{1}{C-x}\right)^2$ . Funktionen är en lösning.  
(b)  $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $2/\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 4\sqrt{x} \neq \sqrt{x}$ . Funktionen är ej en lösning.  
(c)  $f' = \cos(xy)$ ,  $\frac{\sin 2x}{\cos(x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)} = 2\sin(x)$ . Funktionen är en lösning.  
(d)  $f' = \frac{k^2}{\cos^2(kx)}$ ,  $f'' = \frac{2k^3\sin(kx)}{\cos^3(kx)}$ ,  $2k \tan(kx) \frac{k^2}{\cos^2(kx)} = \frac{2k^3\sin(kx)}{\cos^3(kx)}$ . Funktionen är en lösning.

**Ö3.5** (a) t.ex.  $u = 3x + 1$ . (b) t.ex.  $u = e^x$ . (c) t.ex.  $u = e^{kx}$ . (d) t.ex.  $u = \frac{x+1}{x}$ .

- Ö3.6** (a)  $f(u) = u$  är kontinuerlig  $\forall x, u$ .  $|f(u_1) - f(u_2)| = |u_1 - u_2| = |u_1 - u_2|$  alltså Lipschitzkontinuerlig med konstant 1. Det finns ett entydigt  $u$  i en omgivning till  $[0, 1]$ . Funktionen är  $e^x$ .
- (b)  $f = ku$  är kontinuerlig  $\forall x, u$ .  $|f(u_1) - f(u_2)| = |ku_1 - ku_2| = |k||u_1 - u_2|$ . Låt  $L = |k| \Rightarrow |ku_1 - ku_2| \leq L|u_1 - u_2|$ .  $f$  är alltså Lipschitzkontinuerlig och det finns ett entydigt  $u$  i en omgivning till  $[0, 2]$ . Funktionen är  $2e^x$ .
- (c)  $f = u'$  är kontinuerlig på rektangeln  $x \in [0, \infty]$ ,  $u \in [0, \infty]$ , men  $\frac{df}{du} = 3u^{-1/4}$  är inte begränsad i  $x = 0$ .  $f$  är alltså inte Lipschitzkontinuerlig på rektangeln. Villkoren för entydig lösning är därför inte uppfyllda och vi kan bestämma två lösningar  $u = x^4$  och  $u = 0$ .
- (d)  $f = u'$  är kontinuerlig  $\forall u$ .  $f$  är visserligen inte Lipschitzkontinuerlig  $\forall u$ , eftersom  $f'$  går mot oändligheten då  $u$  ökar, men på en rektangel  $a < x < b$ ,  $c < u < d$  innehållande  $[0, 2]$  är  $|1 - u_1^2 - (1 - u_2^2)| = |u_1 - u_2||u_1 + u_2| \leq L|u_1 - u_2|$  för  $L = 2 \max(|c|, |d|)$ . Villkoren för entydig lösning är alltså uppfyllda. (Lösningen är  $u = \frac{3e^{2x} + 1}{3e^{2x} - 1}$ .)

- Ö3.7** (a) Skriv som  $\phi(x) = \phi(0) + \int_0^x 2\phi dt$  med startgissning  $\phi_0 = 1$ .  $\phi_1 = 1 + \int_0^x 2 \times 1 dt = 1 + 2x$ .  
 $\phi_2 = 1 + \int_0^x 2(1 + 2t) dt = 1 + 2x + 2x^2$ .  $\phi_3 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3}$  och i allmänna fallet  
 $\phi_n = \sum_{k=0}^n \frac{(2x)^k}{k!}$  vilket är Taylorutvecklingen för lösningen,  $e^{2x}$ .
- (b) Börja med  $\phi_0 = 1$ . Iteration av  $\phi_n(x) = 1 + \int_0^x -\phi_{n-1}(t)t dt$  ger  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \dots = e^{-x^2/2}$ .
- (c) Startgissning  $\phi_0 = 2$  och  $\phi_i = \int_0^x \phi_{i-1}(t) - t dt$  ger  $1 + x + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots = 1 + x + e^x$ .
- (d) Startgissning  $\phi_0 = 0$  och  $\phi_i = \int_0^x 2t(1 + \phi_{i-1}(t)) dt$  ger  $x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2} - 1$ .

- Ö3.8** (a)  $u du = 3x dx$ .  $\int u du = \int 3x dx \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{3x^2}{2} + C'$  och  $u^2 = 3x^2 + C$ .
- (b)  $\frac{1}{u} du = x^2 dx$ .  $\int \frac{1}{u} du = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln u = \frac{x^3}{3} + C'$  och  $u = Ce^{\frac{x^3}{3}}$ .
- (c)  $\frac{1}{u} du = (1 - x) dx$ .  $\int \frac{1}{u} du = \int 1 - x dx \Leftrightarrow \ln u = \frac{2x - x^2}{2} + C'$  och  $u = Ce^{\frac{2x - x^2}{2}}$ .
- (d)  $u du = x + \sin(x) dx$ .  $\int u du = \int x + \sin(x) dx \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \cos(x) + C'$  eller  $u^2 = x^2 - 2 \cos(x) + C$ .

- Ö3.9** (a)  $\int \frac{du}{e^u} = \int \cos(x) dx \Leftrightarrow -e^{-u} = \sin(x) + C'$  och  $u = -\ln(C - \sin(x))$ .
- (b)  $\int \frac{du}{u^2} = \int dx \Leftrightarrow -u^{-1} = x + C'$  eller  $u = \frac{1}{C - x}$ .
- (c)  $\int \frac{dx}{4 - x^2} = \int du \Leftrightarrow u = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C'$  eller  $x = \frac{2(e^{4u} - e^{4C})}{e^{4C} + e^{4u}}$ .
- (d)  $\int v dv = \int g ds \Leftrightarrow v^2 = 2gs + C$  eller  $v = \pm \sqrt{2gs + C}$ .

- Ö3.10** (a) Låt  $v = u/x$ ,  $\frac{du}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$  och dela täljare och nämnare med  $x^2$ .  $v^2 + v = v + x \frac{dv}{dx} \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{x}$ .  $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{v^2} \Leftrightarrow \ln|x| = C' - \frac{1}{v}$ . Substitution av  $v$  mot  $u/x$  ger  $\ln|x| = C' - \frac{x}{u}$  eller  $u = \frac{x}{C - \ln|x|}$  (med  $C = -C'$ ).
- (b) Låt  $v = u/x$  och dela täljare och nämnare med  $x^2$ .  $v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{v-v^2} = \frac{1}{v} \cdot \int \frac{v}{1-v^2} dv = \int \frac{dx}{x} = \{u = 1 - v^2\} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\ln|u| = 2 \ln|x| + C_1 = \ln C_2 x^2 \Leftrightarrow |1 - v^2| = |1 - u^2/x^2| = \frac{C_3}{x^2}$  eller  $x^2 - u^2 = C_4$ .
- (c)  $v = \frac{u}{x} \Rightarrow v + e^v = v + x \frac{dv}{dx}$ .  $\int \frac{dx}{x} = \int e^{-v} dv \Leftrightarrow e^{-v} = C - \ln|x|$ . Substitution ger  $e^{-u/x} = C - \ln|x|$  och  $u = -x \ln(C - \ln(x))$ .

$$(d) v + x \frac{dv}{dx} = \sqrt{v} + v \Leftrightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{v} = \ln|x| + C \text{ och } u = \frac{x}{4}(\ln|x| + C)^2.$$

**Ö3.11** (a)  $\int \frac{du}{u+1} = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln|u+1| = x^3/3 + C'$  och  $u = Ce^{\frac{x^3}{3}} - 1$ .  $u(0) = C - 1 = 2 \Rightarrow C = 3$ ,  
 $u = 3e^{\frac{x^3}{3}} - 1$

(b) Substituera  $u = vx$ .  $v + x \frac{dv}{dx} = (\cos(v/2))^{-1} + v$ .  $\int \cos(v/2) dv = \int \frac{dx}{x}$ .  $2 \sin(v/2) = \ln|x| + C'$ .  $v = 2 \arcsin \frac{1}{2}(\ln|x| + C')$  eller  $u = 2x \arcsin(\ln \sqrt{|x|} + C)$ .  $x = 1$  ger  $u = 2$  om  $C = \sin 1$ , så  $u = 2x \arcsin(\ln \sqrt{|x|} + \sin 1)$ .

(c)  $\int 1 + 3u^2 du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow u + u^3 = \ln|x| + C$ .  $u(1) = 2 \Rightarrow 2 + 2^3 = \ln 1 + C \Rightarrow C = 10$ ,  
 $u + u^3 = \ln|x| + 10$ . Kan också uttryckas  $x = \frac{e^u e^{u^3}}{e^{10}}$ .

(d) Låt  $u = xu$  med  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2}$ .  $\frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = e^{-u} - \frac{u}{x^2} \Leftrightarrow \int x dx = \int e^u du$ .  
 $e^u = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow u = \frac{1}{x} \ln(\frac{x^2}{2} + C)$ . Begynnelsevillkoret ger  $u = \frac{1}{x} \ln(\frac{x^2}{2} - 1)$ .

**Ö3.12** (a) Identifiera som  $u' + fu = g$  med  $f = \frac{1}{x}$  och  $g = x$ . Med hjälp av en integrerande faktor ges lösningen av  $u = e^{-F} \int e^F g dx$ .  $F = \ln(x) \Rightarrow u = e^{-\ln(x)} \int e^{\ln(x)} x dx = \frac{1}{x} \int x^2 dx = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ .

(b)  $f = \frac{1}{x}$ ,  $g = \frac{1}{x^2}$ .  $F = \ln(x) \Rightarrow u = \frac{1}{x} \int x \times \frac{1}{x^2} dx = \frac{C + \ln(x)}{x}$ .

(c)  $u = e^{-3 \ln(x)} \int e^{3 \ln(x)} x dx = x^{-3} \int x^4 = x^2/5 + C/x^3$

(d)  $f = 2 + 2x$ ,  $g = e^{-x^2}$ ,  $F = 2x + x^2$ .  $e^{-(2x+x^2)} \int e^{2x+x^2} e^{-x^2} dx = e^{-x^2} 2 + C e^{-(2x+x^2)}$ .

**Ö3.13** (a)  $u' = -3e^{-3x}$ ,  $u'' = 9e^{-3x}$ .  $9e^{-3x} + 2 \times -3e^{-3x} = 3 \times e^{-3x}$ .

(b)  $u'' = -4 \cos(2x)$ .  $-4 \cos(2x)/4 + \cos(2x) = 0$ .

(c)  $u' = C$ ,  $u'' = 0$ .  $x^3 \times 0 + 2xC = 2Cx$ .

(d)  $u' = 2x$ ,  $u'' = 2$ .  $x^2 \times 2 + 2 \times x^2 = 2x \times 2x$ .

**Ö3.14** (a) Låt  $v = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dv}{du} = v/x$  med lösning  $v = C'x$  och  $u = \int v dx = Cx^2 + D$ .

(b)  $\frac{d^2u}{dx^2} = v \frac{dv}{du}$ . Skriv ekvationen som  $uv \frac{dv}{du} = v^2$  med lösning  $v = Cu$ . Integrera m.a.p.  $x$ :  
 $\ln u = Cx + D'$ ,  $u = De^{Cx}$ .

(c)  $v \frac{dv}{du} = 2vu$  med lösning  $v = u^2 + C'$  och  $u = \int v dx \Rightarrow \frac{1}{C} \arctan \frac{u}{C} = x + D'$ .  
 $u = C \tan(Cx + D)$ .

(d)  $\frac{dv}{dx} + v = x$ . Använd integrerande faktor  $e^x$  och P.I.:  $v = e^{-x} \int e^x x dx = x - 1 - Ce^{-x}$ .  
 $u = \int v dx = x^2/2 - x + Ce^{-x} + D$ .

**Ö3.15** (a) Låt  $v = \frac{du}{dx}$  och skriv som  $\frac{dv}{dx} = xv^3 \Leftrightarrow \int v^{-3} dv = \int x dx$ .  $-\frac{v^{-2}}{2} = \frac{x^2}{2} + C'$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{C-x^2}}$ .  
 $u'(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ . Integrera igen:  $u = \arcsin x + D$ .  $u(0) = 0 \Rightarrow u = \arcsin x$ .

(b)  $\frac{dv}{dx} + 2 \sin(x) \sqrt{v} = 0$ ,  $\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\int 2 \sin(x) dx$ .  $\sqrt{u'} = C + \cos(x)$ . Begynnelsevillkor 1 ger  $C = \sqrt{1} - \cos 0 = 0$  och  $u' = \cos^2 x$ . Integration och begynnelsevillkor 2 ger  $u = 1 + \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$ .

(c)  $v' = -2xv^2$ .  $v = \frac{1}{x^2+4}$ .  $u = \frac{1}{2} \arctan(\frac{x}{2})$ .

(d)  $\ln v = \ln(\cos(x)) + C' \Leftrightarrow v = C \cos(x)$  med  $C = 2$ .  $u = 2 \sin(x)$ .

**Ö3.16** (a)  $2v dv = 2 \sin(x) \cos(x) dx$ .  $v^2 = \sin^2 x + C$  med  $C = 0$ .  $u' = \pm \sin(x)$ ,  $u = \pm \cos(x) + D$ .  
 $u_1 = 1 - \cos(x)$ ,  $u_2 = \cos(x) - 1$ .

- (b)  $e^v dv = 3x^2 dx$ .  $e^v = x^3 + C$  med  $C = 0$ ,  $u' = \ln(x)^3 = 3 \ln(x)$ .  $u = 3x(\ln(x) - 1) + D$ .  
 $u = x(\ln(x)^3) - 3$ .
- (c)  $e^v dv = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} dx$ .  $e^v = e^{\sqrt{2x}} + C$  med  $C = 0$ ,  $u' = \sqrt{2x}$ .  $u = \frac{(2x)^{1.5}}{3} + D$ .  $u = \frac{(2x)^{3/2}}{3}$ .
- (d)  $v^{-2} dv = -2x dx$ .  $-\frac{1}{v} = -x^2 + C$  med  $C = 1$ .  $u' = \frac{1}{1-x^2}$ . Integration och randvillkor ger  
 $u = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1$ .

- Ö3.17** (a)  $u_h'' = -9A \sin(3x) - 9B \sin(3x)$ ,  $u_p'' = 2$ .  $u_h'' + 9u_h = 0$ , alltså är  $u_h$  homogenlösningen.  $u_p'' + 9u_p = 2 + 9x^2$ , så  $u_p$  är partikulärlösning. Med  $u = u_h + u_p$  fås  $u(0) = B = 0$ ,  $u'(0) = 3A = 1$ ,  $A = 1/3$ .  $u = 1/3 \sin(3x) + x^2$ .
- (b)  $u(0) = A + B + 0 = 0$ ,  $u'(0) = -3A - 2B + 1 = 0$  med lösning  $A = 1$ ,  $B = -1$ .  
 $u = e^{-3x} - e^{-2x} + x$ .
- (c)  $u(1) = A + B + 1 = 0$ ,  $u'(-1) = -2A + 3B - 1 = 1$  med lösning  $A = -1$ ,  $B = 0$ .  
 $u = \frac{1}{x} - x^2$
- (d)  $u(1) = B + 1 = 5$ ,  $B = 4$ .  $u'(1) = A \frac{1-\ln 1}{1^2} - B/1^2 + 1 = 1$ ,  $A = 4$ .  $u = \frac{4+4 \ln(x)}{x} + x$ .

- Ö3.18** (a)  $f' = e^x$ ,  $f'' = e^x$ .  $e^x - 2e^x + e^x = 0$ .  $u_1 = e^x$ .  $u = v(x)e^x$ ,  $u' = v'e^x + ve^x$ ,  
 $u'' = v''e^x + 2v'e^x + ve^x$ .  $(v''e^x + 2v'e^x + ve^x) - 2(v'e^x + ve^x) + (ve^x) = 0 = v''e^x$ .  
 $v'' = 0$  och  $v = Cx + D$ .  $u = Cxe^x + De^x$ .
- (b)  $f' = e^x$ ,  $f'' = e^x$ .  $e^x - 3e^x + 2e^x = 0$ .  $u_1 = e^x$ .  $u = v(x)e^x$ ,  $u' = v'e^x + ve^x$ ,  
 $u'' = v''e^x + 2v'e^x + ve^x$ .  $(v''e^x + 2v'e^x + ve^x) - 3(v'e^x + ve^x) + 2(ve^x) = 0 = v''e^x - v'e^x$ .  
 $v'' = v'$  och  $v = Ce^x + D$ .  $u = Ce^{2x} + De^x$ .
- (c)  $f' = 3e^{3x}$ ,  $f'' = 9e^{3x}$ .  $9e^{3x} - 4 \times 3e^{3x} + 3e^{3x} = 0$ .  $u_1 = e^{3x}$ .  $u = v(x)e^{3x}$ ,  $u' = v'e^{3x} + 3ve^{3x}$ ,  
 $u'' = v''e^{3x} + 6v'e^{3x} + 9ve^{3x}$ .  $(v''e^{3x} + 6v'e^{3x} + 9ve^{3x}) - 4(v'e^{3x} + 3ve^{3x}) + 3(ve^{3x}) = 0 = v'' + 2v'$ .  
 $v = Ce^{-2x} + D$ .  $u = Ce^x + De^{3x}$ .
- (d)  $f' = -2e^{-2x}$ ,  $f'' = 4e^{-2x}$ .  $4e^{-2x} - 10e^{-2x} + 6e^{-2x} = 0$ .  $u_1 = e^{-2x}$ .  $u = v(x)e^{-2x}$ ,  
 $u' = v'e^{-2x} - 2ve^{-2x}$ ,  $u'' = v''e^{-2x} - 4v'e^{-2x} + 4ve^{-2x}$ .  $(v''e^{-2x} - 4v'e^{-2x} + 4ve^{-2x}) + 5(v'e^{-2x} - 2ve^{-2x}) + 6(ve^{-2x}) = 0 = v'' + v'$ .  
 $v = Ce^{-x} + D$ .  $u = Ce^{-3x} + De^{-2x}$ .

- Ö3.19** (a)  $f' = 1$ ,  $f'' = 0$ .  $x^2 \times 0 + 3x - 3x = 0$ .  $u_1 = x$ .  $u = xv(x)$ ,  $u' = xv' + v$ ,  $u'' = xv'' + 2v'$ .  
 $x^2(xv'' + 2v') + 3x(xv' + v) - 3(xv) = 0 = x^3v'' + 5x^2v'$  Substitution  $w = v'$  ger  $w = C'x^{-5}$   
och  $v = Cx^{-4} + D$ .  $u = Cx^{-3} + Dx$ .
- (b)  $f' = \frac{e^{x/2}}{2}$ ,  $f'' = \frac{e^{x/2}}{4}$ .  $\frac{e^{x/2}}{4} + \frac{e^{x/2}}{2} - \frac{3}{4}e^{x/2} = 0$ .  $u_1 = e^{x/2}$ .  $u = e^{x/2}v(x)$ ,  $u' = e^{x/2}v' + \frac{e^{x/2}}{2}v$ ,  
 $u'' = e^{x/2}v'' + 2\frac{e^{x/2}}{2}v' + \frac{e^{x/2}}{4}v$ .  $(e^{x/2}v'' + 2\frac{e^{x/2}}{2}v' + \frac{e^{x/2}}{4}v) + (e^{x/2}v' + \frac{e^{x/2}}{2}v) - 3/4(e^{x/2}v) = 0 = v'' + 2v'$   
och  $v = Ce^{-2x} + D$ .  $u = Ce^{-3x/2} + De^{x/2}$ .
- (c)  $f' = -\sin(x)$ ,  $f'' = -\cos(x)$ .  $-\cos(x) + \cos(x) = 0$ .  $u_1 = \cos(x)$ .  $u = \cos(x)v(x)$ ,  
 $u' = \cos(x)v' - \sin(x)v$ ,  $u'' = \cos(x)v'' - 2\sin(x)v' - \cos(x)v$ .  $\cos(x)v'' - 2\sin(x)v' - \cos(x)v + \cos(x)v = 0 = \cos(x)v'' - 2\sin(x)v'$ .  
Substitution  $w = v'$  ger  $w = \frac{C}{\cos^2 x}$  och  
 $v = \int w dx = C \tan x + D$ .  $u = C \sin(x) + D \cos(x)$ .
- (d)  $f' = \frac{-1}{x^2}$ ,  $f'' = \frac{2}{x^3}$ .  $x^2 \frac{2}{x^3} + 3x \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$ .  $u_1 = \frac{1}{x}$ .  $u = \frac{1}{x}v(x)$ ,  $u' = \frac{1}{x}v' + \frac{-1}{x^2}v$ ,  
 $u'' = \frac{1}{x}v'' + 2\frac{-1}{x^2}v' + \frac{2}{x^3}v$ .  $x^2(\frac{1}{x}v'' + 2\frac{-1}{x^2}v' + \frac{2}{x^3}v) + 3x(\frac{1}{x}v' + \frac{-1}{x^2}v) + (\frac{1}{x}v) = 0 = xv'' + v'$ ,  
 $v' = C/x$  och  $v = C \ln(x) + D$ .  $u = \frac{C \ln(x)}{x} + \frac{D}{x}$ .

- Ö3.20** (a)  $f' = 1$ ,  $f'' = 0$ .  $x^2 \times 0 + (x^2 - 2x) \times 1 + (2 - x)x = 0$ .  $u_1 = x$ .  $u = xv(x)$ ,  $u' = xv' + v$ ,

$u'' = xv'' + 2v' \cdot x^2(xv'' + 2v') + (x^2 - 2x)(xv' + v) + (2 - x)(xv) = 0 = x^3v'' + x^3v'$  och  $v = Ce^{-x} + D$ .  $u = Cxe^{-x} + Dx$ .

(b)  $f' = 2x$ ,  $f'' = 2$ .  $2x^2 - 4x \times 2x + 6x^2 = 0$ .  $u_1 = x^2$ .  $u = x^2v(x)$ ,  $u' = x^2v' + 2xv$ ,  $u'' = x^2v'' + 4xv' + 2v$ .  $x^2(x^2v'' + 4xv' + 2v) - 4x(x^2v' + 2xv) + 6(x^2v) = 0 = x^4v''$  och  $v = Cx + D$ .  $u = Cx^3 + Dx^2$ .

(c)  $f' = 2x$ ,  $f'' = 2$ .  $2x^2 - 2x \times 2x + 2x^2 = 0$ .  $u_1 = x^2$ .  $u = x^2v(x)$ ,  $u' = x^2v' + 2xv$ ,  $u'' = x^2v'' + 4xv' + 2v$ .  $x^2(x^2v'' + 4xv' + 2v) - 2x(x^2v' + 2xv) + 2(x^2v) = 0 = x^4v'' + 2x^3v'$  och  $v = C/x + D$ .  $u = Cx + Dx^2$ .

(d)  $f' = 2 \cos(2x)$ ,  $f'' = -4 \sin(2x)$ .  $-4 \sin(2x) + 4 \sin(2x) = 0$ .  $u_1 = \sin(2x)$ .  $u = \sin(2x)v(x)$ ,  $u' = \sin(2x)v' + 2 \cos(2x)v$ ,  $u'' = \sin(2x)v'' + 4 \cos(2x)v' - 4 \sin(2x)v$ .  $(\sin(2x)v'' + 4 \cos(2x)v' - 4 \sin(2x)v) + 4(\sin(2x)v) = 0 = \sin(2x)v'' + 4 \cos(2x)v'$  och  $v = C' \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -\frac{C'}{2 \tan 2x} + D$ .  $u = C \cos(2x) + D \sin(2x)$ .

**Ö3.21** (a)  $r_1 = -\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} - 3} = 1$ .  $r_2 = -\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - 3} = -3$ .  $u = Ae^t + Be^{-3t}$ .

(b)  $r_1 = -\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - 4} = -2$ .  $r_2 = -\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} - 4} = -2$ . Dubbelrot, så vi behöver multiplicera en av lösningarna med  $t$ .  $u = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$ .

(c)  $r_1 = -\frac{8}{2} + \sqrt{\frac{8^2}{4} - 7} = -1$ .  $r_2 = -\frac{8}{2} - \sqrt{\frac{8^2}{4} - 7} = -7$ .  $u = Ae^{-t} + Be^{-7t}$ .

(d)  $r_1 = -\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} - 1} = -1$ .  $r_2 = -\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - 1} = -1$ .  $u = Ae^{-t} + Bte^{-t}$ .

**Ö3.22** (a)  $r_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} - 5} = 1 + 2i$ .  $r_2 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - 5} = 1 - 2i$ .  $u = Ae^{(1+2i)t} + Be^{(1-2i)t} = A'e^t \cos(2t) + B'e^t \sin(2t)$ .

(b)  $r_1 = -\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - 8} = -2 + 2i$ .  $r_2 = -\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} - 8} = -2 - 2i$ .  $u = Ae^{(-2+2i)t} + Be^{(-2-2i)t} = A'e^{-2t} \cos(2t) + B'e^{-2t} \sin(2t)$ .

(c)  $r_1 = 0$ .  $r_2 = -8$ .  $u = A + Be^{-8t}$ .

(d)  $r_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} - 10} = 1 + 3i$ .  $r_2 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - 10} = 1 - 3i$ .  $u = Ae^{(1+3i)t} + Be^{(1-3i)t} = A'e^t \cos(3t) + B'e^t \sin(3t)$ .

**Ö3.23** (a)  $r_1 = \frac{2-10}{2 \times 2} + \sqrt{(\frac{2-10}{2 \times 2})^2 - \frac{6}{2}} = -1$ .  $r_2 = \frac{2-10}{2 \times 2} - \sqrt{(\frac{2-10}{2 \times 2})^2 - \frac{6}{2}} = -3$ .  $u = A/x + B/x^3$ .

(b)  $r_1 = \frac{1-3}{2} + \sqrt{(\frac{1-3}{2})^2 - 5} = -1 + 2i$ .  $r_2 = \frac{1-3}{2} - \sqrt{(\frac{1-3}{2})^2 - 5} = -1 - 2i$ .  $u = Ax^{-1} \cos(2 \ln(x)) + Bx^{-1} \sin(2 \ln(x))$ .

(c)  $r_1 = \frac{2-6}{2 \times 2} + \sqrt{(\frac{2-6}{2 \times 2})^2 - \frac{2}{2}} = -1$ .  $r_2 = \frac{2-6}{2 \times 2} - \sqrt{(\frac{2-6}{2 \times 2})^2 - \frac{2}{2}} = -1$ .  $u = Ax^{-1} + B \ln(x)x^{-1}$ .

(d)  $r_1 = \frac{1+3}{2} + \sqrt{(\frac{1+3}{2})^2 + 5} = 5$ .  $r_2 = \frac{1+3}{2} - \sqrt{(\frac{1+3}{2})^2 + 5} = -1$ .  $u = Ax^5 + B/x$ .

**Ö3.24** (a) Ansätt  $u_p = Ae^x$  och sätt in i ODE:n:  $u_p'' + 2u_p' + u_p = Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = 4Ae^x = f(x) = e^x$ .  $A = 1/4$  och  $u_p = \frac{e^x}{4}$ .

(b) Vi kan inte ansätta  $u_p = Ae^{2x}$  eftersom  $u_p$  då blir homogenlösning till ekvationen. Vi multiplicerar med  $x$ :  $u_p = Axe^{2x}$ .  $u_p'' - 3'u_p + 2u_p = 4e^{2x}(Ax + A) - 3e^{2x}(2Ax + A) + 2e^{2x}Ax = Ae^{2x} = e^{2x}$ . Så  $A = 1$  och  $u_p = xe^{2x}$ .

- (c) Vi kan med gott samvete ansätta  $u_p = A \sin(x) + B \cos(x)$  vilket ger  $-A \sin(x) - B \cos(x) - 3(A \cos(x) - B \sin(x)) + 2(A \sin(x) + B \cos(x)) = (A + 3B) \sin(x) + (B - 3A) \cos(x) = \sin(x)$ .  $A + 3B = 1$ ,  $B - 3A = 0$ .  $A = \frac{1}{10}$ ,  $B = \frac{3}{10}$ .  $u_p = \frac{\sin(x)}{10} + \frac{3 \cos(x)}{10}$ .
- (d) Vi antar ett polynom  $u_p = Ax + B$ .  $4A + 2Ax + 2B = x$ .  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = -1$ .  $u_p = \frac{x}{2} - 1$ .

- Ö3.25** (a) Ansätt  $u_p = Ax^2 + Bx + C$ .  $2x^2 = 6A - 2Ax - B + Ax^2 + Bx + C = Ax^2 + (-2A + B)x + 6A - B + C$ .  $A = 2$ ,  $-2A + B = 0$ ,  $6A - B + C = 0$ .  $B = 4$ ,  $C = -8$ .  $u_p = 2x^2 + 4x - 8$ .
- (b)  $A \cos(3x) + B \sin(3x)$  är homogenlösning, så ansätt  $Ax \cos(3x) + Bx \sin(3x)$ .  $\cos(3x) = \cos(3x)(6B - 9Ax) - 3 \sin(3x)(2A + 3Bx) + 9(Ax \cos(3x) + Bx \sin(3x))$ .  $-3(2A + 3Bx) + 9Bx = 0$ ,  $6B - 9Ax + 9Ax = 1$ .  $B = 1/6$ ,  $A = 0$ .  $u_p = x/6 \sin(3x)$ .
- (c) Eftersom vänsterledet innehåller ett polynom av grad 1 ansätter vi  $u_p = (Ax + B)e^{2x}$ .  $u'' + u = 4e^{2x}(Ax + A + B) + (Ax + B)e^{2x} = xe^{2x}$ .  $4A + A = 1$ ,  $4(A + B) + B = 0$ .  $A = 1/5$ ,  $B = -4/25$ .  $u_p = \frac{xe^{2x}}{5} - \frac{4e^{2x}}{25}$ .
- (d) Vi vill ansätta  $u_p = (Ax + B)e^x$ , men den funktionen är homogenlösning till DE:n. Om vi ansätter  $u_p = x(Ax + B)e^x$ , så är en av termerna i  $u_p$  ( $Bxe^x$ ) fortfarande en homogenlösning. Vi måste därför ansätta  $u_p = x^2(Ax + B)e^x$ .  $(Ax^3 + 6Ax^2 + 6Ax + Bx^2 + 4Bx + 2B)e^x - 2(Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x = xe^x$ .  $6A + 4B - 4B = 1$ ,  $2B = 0$ .  $u_p = \frac{1}{6}x^3e^x$ .

## Problem

- P3.1**  $\frac{d}{du} \sqrt{u-1} = \frac{1}{2\sqrt{u-1}}$  saknar värde i  $u = 1$ , så funktionen är inte Lipschitzkontinuerlig på någon rektangel innehållande  $(1, 1)$ . Det finns två lösningar  $u_1 = 1$  och  $u_2 = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 5)$ . För att bestämma  $u_2$ , låt  $v = u - 1$ ,  $\frac{dv}{dx} = \sqrt{v}$  med lösningen  $x + C = 2\sqrt{v} \Leftrightarrow v = \frac{1}{4}(x + C)^2$  vilket efter substitution och med begynnelsevillkoret ger  $u_2$ . Lösningen är alltså inte entydig.
- P3.2** Vi har  $\|f\|_p^p = \int_a^b |f|^p dx \leq \max_{x \in [a,b]} |f|^p \int_a^b 1 dx = (b-a) (\max_{x \in [a,b]} |f|)^p$ . Resultatet följer genom att upphöja till  $1/p$  på båda sidor.
- P3.3** Eftersom  $f(u) = u$  är Lipschitz kontinuerlig har vi existens av lösning i en omgivning till  $[0, 1]$ . Vi har  $v(0) = u(0)^2 = 1$  och  $v' = 2uu' = 2u^2u_2 = 2v$ .
- P3.4** Låt  $x = 2$  så får vi  $u(2) = 1$ . Derivera ekvationen  $u'(x) = u^2(x) = u^2(x)$ . Variabelseparation ger  $x + C = \int 1 dx = \int \frac{1}{u^2(x)} du = -\frac{1}{u(x)}$ . Instättning av  $u(2) = 1$  ger  $C = -3$ . Sammantaget får vi  $u(x) = \frac{1}{3-x}$ .
- P3.5** Låt  $v(x) = y'(x)$ . Vi får  $v' = v^2$  som är separabel. Vi får  $\int \frac{1}{v^2} dv = \int 1 dx = x + C$ . Vi får  $-1/v(x) = x + C$ . Begynnelsevillkoret ger  $v(0) = 1$  vilket ger  $C = -1$ . Vi får  $v(x) = \frac{1}{1-x}$ . Därför får vi  $y(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C$ . Begynnelsevillkoret ger  $0 = y(0) = C$ . Vi får  $y(x) = -\ln(1-x)$ .
- P3.6** Låt  $v(x) = \ln(x)$  i ekvationerna (3.85-3.88) får vi  $ax^{r+1}(xv''(x) + v'(x)) = ax^{r+1}(-x^{-1} + x^{-1}) = 0$  vilket innebär att  $x^r \ln(x)$  löser Eulers ekvation med dubbelrot  $r_1 = r_2 = r$ .
- P3.7** Den karakteristiska ekvationen  $r^4 - 1 = 0$  med faktorer  $(r+1)(r-1)(r+i)(r-i) = 0$ . Vi antar  $u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin(t) + C_4 \cos(t)$  som löser ekvationen. Eftersom lösningen ska gå mot noll då  $t \rightarrow \infty$  måste  $C_1 = C_3 = C_4 = 0$ . Alltså  $u(t) = e^{-t}$ .

- P3.8** Vi antar  $u = e^{rt}$  vilket ger den karakteristiska ekvationen  $r^3 + 2r^2 - r - 2$ . Vi ser genom insättning att en lösning ges av  $r = 1$ . Vi faktorerar polynomet  $r^3 + 2r^2 - r - 2 = (r - 1)(r^2 + 3r + 2) = (r - 1)(r + 1)(r + 2)$  vars nollställen ges av  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = -1$  och  $r_3 = -2$ . Vi har tre oberoende lösningskandidater och den allmänna lösningen ges därför som  $u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t}$ .
- P3.9** Vi antar  $u(x) = Ax^2 + Bx + C$  och får  $x^2 = 2Ax^2 + 2Ax^2 + Bx + Ax^2 + Bx + C$  vilket uppfylls om  $A = 1/5$  och  $B = C = 0$ . Vi får  $u(x) = \frac{1}{5}x^2$ .
- P3.10** Vi har att  $\frac{\partial u(x-ct)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x-ct)}{\partial x} = -cu'(x-ct) + cu'(x-ct) = 0$ .

## Kapitel 4

### Övningar

- Ö4.1** (a) Vi har att  $e^t \cos(t) \leq e^t$  för  $t > 0$ . Alltså gäller att  $|e^t \cos(t)| \leq C e^{at}$  håller med  $C = a = 1$  och Laplacetransformen är väldefinierad för  $Re(s) > 1$  (b) Vi har att  $e^{3t} \sin(t) \leq e^{3t}$  för  $t > 0$ . Alltså gäller att  $|e^{3t} \sin(t)| \leq C e^{at}$  håller med  $C = 1$ ,  $a = 3$  och Laplacetransformen är väldefinierad för  $Re(s) > 3$  (c) För varje  $a > 0$  vill vi välja  $C$  så att  $t \leq C e^{at}$ . Vi får att  $C \geq f(t) := t e^{-at}$ . Funktionen  $f(t)$  är större än eller lika med 0 och har sitt maximum då dess derivata är noll alltså  $f'(t) = e^{-at}(1 - at) = 0$ . Det ger  $t = 1/a$  och att maximum blir  $\max_t f(t) = a^{-1} e^{-1}$ . Vi väljer  $C = a^{-1} e^{-1}$  och får att för varje  $a > 0$  finns  $C$  så att  $t \leq C e^{at}$ . Alltså är Laplacetransformen väldefinierad för alla  $Re(s) > 0$  (d) Eftersom  $C e^{at} > D$  för  $t > 0$  är sant för  $a > 0$  och  $C > D$  där  $D$  är en konstant är denna Laplacetransform med  $C = 3000$  väldefinierad för  $Re(s) > 0$
- Ö4.2** (a) För varje  $a > 0$  vill vi välja  $C$  så att  $t^2 \leq C e^{at}$ . Vi får att  $C \geq f(t) := t^2 e^{-at}$ . Funktionen  $f(t)$  är större än eller lika med 0 och har sitt maximum då dess derivata är noll alltså  $f'(t) = t e^{-at}(2 - at) = 0$ . Det ger  $t = \frac{2}{a}$  och att maximum blir  $\max_t f(t) = 4a^{-2} e^{-2}$ . Vi väljer  $C = 4a^{-2} e^{-2}$  och får att för varje  $a > 0$  finns  $C$  så att  $t^2 \leq C e^{at}$ . Alltså är Laplacetransformen väldefinierad för alla  $Re(s) > 0$  (b)  $(t + 1)(t - 1)$  kan förenklas till  $t^2 - 1$ . Med samma argument som i 14.2a) följer det att  $Re(s) > 0$  (c) Ansätt  $g(t) = t e^t$ . För  $t > 0$  följer att  $g(t) < g(t) e^{bt}$  för alla  $b > 0$ . Med  $a = 1 + b$  fås att  $t e^t < C e^{at}$  med  $C = 1$  för alla  $a > 1$ . Detta medför  $Re(s) > 1$  (d)  $e^{2t} \sin^2(t) < e^{2t}$ . Detta medför att med  $C = 1$  fås  $e^{2t} \sin^2(t) < e^{at}$  för  $a = 2$ . Detta medför  $Re(s) > 2$
- Ö4.3** (a) På grund av linjäritet får vi  $\mathcal{L}(3t + t^2)(s) = 3\mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^3}$ . (b) På grund av linjäritet får vi  $\mathcal{L}(t + 3t^2)(s) = \mathcal{L}(t)(s) + 3\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s^3}$  (c) På grund av linjäritet får vi  $\frac{\mathcal{L}(2t - 2t^2)(s)}{s} = \frac{2\mathcal{L}(t)(s) - 2\mathcal{L}(t^2)(s)}{s} = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^4}$  (d) På grund av linjäritet får vi  $\mathcal{L}(t(a + bt))(s) = a\mathcal{L}(t)(s) + b\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{2b}{s^3}$
- Ö4.4** (a) Vi har att  $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ . Linjäritet ger att  $f(t) = 7t$ . (b) Vi har att  $\mathcal{L}(t^3)(s) = \frac{6}{s^4}$ . Linjäritet ger att  $f(t) = 2t^3$  (c) Vi har att  $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ ,  $\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$ ,  $\mathcal{L}(t^3)(s) = \frac{6}{s^4}$ . Linjäritet ger  $f(t) = t + t^2/2 + t^3$  (d) Vi har att  $\mathcal{L}(e^{4t})(s) = \frac{1}{s-4}$ . Linjäritet ger  $f(t) = 3e^{4t}$
- Ö4.5** (a)  $10 \sin(t^2) e^{3t} \leq 10 e^{3t}$ , ty  $\sin(x) = [-1, 1] \forall x$ . Detta ger  $a = 3$ ,  $C = 10$  (b) Ansätt  $g(t) = 5e^t$ . Laplacetransformen för  $g(t)$  är väldefinierad för  $C = 5$ ,  $a = 5$ . Det är trivialt att  $t < e^t$  för



alla  $t > 0$ . Alltså är  $tg(t) < 5e^{5t}e^t = 5e^{6t}$ . Alltså  $a = 6, C = 5$  (c) Ej möjligt eftersom  $f(t)$  växer snabbare än  $Ce^{at}$  för samtliga kombinationer av  $a$  och  $C$  när  $t$  går mot oändligheten. Detta kan visas med L'Hôpitals regel. (d) Eftersom  $\ln(t+1)$  är strikt växande kan denna funktion inte begränsas av  $C$  allena. Sätt därför  $C = 1$ . Vidare,  $\ln(1+t)e^t < Ce^{at} \Rightarrow \ln(1+t) < Ce^{(a-1)t}$ . Finn det maximerade värdet på  $a$  genom att lösa ut  $a$  och beräkna  $a(t) = \frac{\ln(\ln(1+t))}{t} + 1$ . Detta ger  $a \approx 1.11906$ . Alltså  $a = 1.1906, C = 1$

**Ö4.6** (a) Eftersom  $\mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s-1}$  och  $\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$  får vi via skalning att  $\mathcal{L}(e^{5t} + (3t)^2)(s) = \frac{1}{s-5} + \frac{2 \cdot 3^2}{s^3} = \frac{1}{s-5} + \frac{18}{s^3}$ . (b) Eftersom  $\mathcal{L}(te^{-t})(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$  och  $\mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s-1}$  får vi via skalning att  $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-1}$  (c) Eftersom  $\mathcal{L}(\sin(2t))(s) = \frac{2}{(s^2+4)^2}$  och  $\mathcal{L}(\cos(2t))(s) = \frac{s}{(s^2+4)}$  får vi via skalning att  $F(s) = \frac{s+2}{s^2+4}$  (d) Eftersom  $\mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{(s-1)}$ ,  $\mathcal{L}(e^{2t})(s) = \frac{1}{(s-2)}, \dots, \mathcal{L}(e^{nt})(s) = \frac{1}{s-n}$  får vi via skalning  $F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \dots + \frac{1}{s-n}$

**Ö4.7** (a) Exponentiell skalning ger  $\mathcal{L}(e^{4t} \cos(t)) = \frac{s-4}{(s-4)^2+1} = \frac{s-4}{s^2-8s+17}$ . Eftersom  $|\cos(t)| \leq 1$  gäller att Laplacetransformen är väldefinierad för  $s > 4$ . (b) Laplacetransformen för funktioner av formen  $t^n e^{at}$  är  $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ . Alltså fås  $F(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$ . Laplacetransformen är väldefinierad för  $s > 3$  (c) Laplacetransformen för funktioner av formen  $t^n e^{at}$  är  $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ . Alltså fås  $\mathcal{L}(e^{2t}t)(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$  och  $\mathcal{L}(2e^{2t})(s) = \frac{2}{s-2}$ . Alltså fås  $F(s) = \frac{2s-3}{(s-2)^2}$ . Laplacetransformen är väldefinierad för  $s > 2$  (d) Laplacetransformen för funktioner av formen  $t^n e^{at}$  är  $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ . Utveckling av parenteserna ger  $f(t) = te^t + te^{2t}$ . Laplace transformen av respektive term är då  $\mathcal{L}(te^t)(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$  samt  $\mathcal{L}(te^{2t})(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$ . Detta ger  $F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-2)^2}$ . Laplacetransformen är väldefinierad för  $s > 2$

**Ö4.8** (a) Nämnaren faktoriseras och partialbråkkuppdelas:  $\frac{5}{s^2+3s-4} = \frac{5}{(s-1)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+4}$  vilket ger  $A + B = 0$  och  $5 = 4A - B$  med lösning  $A = 1$  och  $B = -1$ . Vi får  $\frac{5}{(s-1)(s+4)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+4}$  med invers Laplacetransform  $f(t) = e^t - e^{-4t}$ . (b) Nämnaren faktoriseras:  $\frac{2s-5}{s^2-5s+6} = \frac{2s-5}{(s-3)(s-2)}$ . Täljaren skrivs om och bråken delas upp:  $\frac{2s-5}{(s-3)(s-2)} = \frac{s-3+s-2}{(s-3)(s-2)} = \frac{s-3}{(s-3)(s-2)} + \frac{s-2}{(s-3)(s-2)} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3}$ . Nu kan Laplaceinversen lätt beräknas till  $f(t) = e^{2t} + e^{3t}$  (c) Täljaren delas upp  $\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$ . Termerna är nu på standardformen för sin och cos, vilket ger  $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$  (d) Laplacetransformen för funktioner på formen  $t^n e^{at}$  är  $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ . Detta motsvarar  $\frac{1}{(s+1)^2}$  då  $n = 1$  och  $a = -1$ . Alltså fås  $f(t) = te^{-t}$

**Ö4.9** (a) Nämnaren faktoriseras och partialbråksuppdelning utförs  $\frac{s}{(s-1)(s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5}$  vilket ger  $1 = A + B$  och  $0 = -5A - B$  med lösning  $A = -\frac{1}{4}$  och  $B = \frac{5}{4}$ . Den inversa Laplacetransformen ges av  $f(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{5}{4}e^{5t}$ . (b) Bråket kan delas upp och förenklas genom  $\frac{s^2+s+2}{s^3+2s^2} = \frac{s^2}{s^3+2s^2} + \frac{s+2}{s^3+2s^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s^2}$ . Genom att utnyttja linjäritet fås så  $f(t) = e^{-2t} + t$  (c) Uppdelning och förenkling av bråket ger  $\frac{s}{s^3} + \frac{4}{s^3} = \frac{1}{s^2} + 4\frac{1}{s^3}$ . Genom linjäritet kan de elementära Laplaceinverserna beräknas till  $f(t) = t + 2t^2$  (d) Faktorisering av nämnaren ger  $\frac{2s^2+5s+50}{s^3+25s} = \frac{2s^2+5s+50}{s(s^2+25)}$ . Partialbråksuppdelning ger vid ansättning av konstanter  $\frac{2s^2+5s+50}{s(s^2+25)} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{s^2+25} = \frac{As^2+25A+Bs+Cs^2}{s(s^2+25)}$ . Detta är sant för  $A = 2, B = 5$  och  $C = 0$ . Alltså fås  $\frac{2s^2+5s+50}{s(s^2+25)} = \frac{2}{s} + \frac{5}{s^2+25}$ . Notera att den andra termen är på formen  $\frac{c}{s^2+c^2}$ . Dess Laplaceinvers är alltså en sinusterm. Sammanfattningsvis fås alltså  $f(t) = 2 + \sin(5t)$

**Ö4.10** (a) Partialbråksuppdelning ger  $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$ . Laplaceinversen ges då av  $1 - e^{-t}$ . (b) Faktorisering av nämnaren  $\frac{3s^2-2s-4}{s^3-s^2-4s+4} = \frac{3s^2-2s-4}{(s-1)(s-2)(s+2)}$ . Ansätt partialbråksuppdelningen  $\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2} = \frac{As^2-4A+Bs^2+Bs-2B+Cs^2-3Cs+2C}{(s-1)(s-2)(s+2)}$ . Genom att lösa ekvationssystemet  $As^2 + Bs^2 + Cs^2 = 3s^2$ ,  $Bs - 3Cs = -2s$ ,  $-4A - 2B + 2C = -4$  fås  $A = 1, B = 1, C = 1$ . Alltså visas det att  $\frac{3s^2-2s-4}{s^3-s^2-4s+4} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2}$ . Detta ger Laplaceinversen  $f(t) = e^{-2t} + e^t + e^{2t}$ . (c) Faktorisering av nämnaren ger  $\frac{2s-2}{s^2-2s-15} = \frac{2s-2}{(s-5)(s+3)}$ . Ansätt  $\frac{2s-2}{(s-5)(s+3)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+3} = \frac{As+3A+Bs-5B}{(s-5)(s+3)}$ . Lösning av ekvationssystemet  $A + B = 2$ ,  $3A - 5B = -2$  ger  $A = 1, B = 1$  och alltså  $\frac{2s-2}{s^2-2s-15} = \frac{1}{s-5} + \frac{1}{s+3}$ . Denna funktion har Laplaceinversen  $f(t) = e^{5t} + e^{-3t}$ . (d) Uppdelning av bråket ger  $\frac{s^3+3s^2+12}{s^4+4s^2} = \frac{s^3}{s^4+4s^2} + \frac{3s^2+12}{s^4+4s^2}$ . Efter förenkling fås  $\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{s^2}$ . Den första termen är på formen  $\frac{s}{s^2+a^2}$  och är alltså Laplaceinversen för en cosinusfunktion. Laplaceinversen för hela uttrycket blir följaktligen  $f(t) = \cos(2t) + 3t$

**Ö4.11** (a) Laplacetransformen av  $f'(t)$  ges av  $sF(s) - f(0)$ . Insättning av begynnelsevillkor ger  $\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - 3$ . (b) Laplacetransformen av  $f''(t)$  ges av  $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ . Insättning av begynnelsevillkor ger  $\mathcal{L}(f''(t))(s) = s^2F(s) - 3s - 7$ . (c) Laplacetransformen av  $f'''(t)$  ges av  $s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$ . Insättning av begynnelsevillkor ger  $\mathcal{L}(f'''(t))(s) = s^3F(s) - 3s^2 - 7s + 4$ . (d) Laplacetransformen av  $f''''(t)$  ges av  $s^4F(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$ . Insättning av begynnelsevillkor ger  $\mathcal{L}(f''''(t))(s) = s^4F(s) - 3s^3 - 7s^2 + 4s - 11$

**Ö14.12** (a) Låt Laplacetransformen av  $f(t)$  vara  $F(s)$ . Laplacetransformen av vänsterledet kan med hjälp av linjäritet skrivas om som  $\mathcal{L}(f''(t) + 3f'(t))(s) = \mathcal{L}(f''(t))(s) + 3\mathcal{L}(f'(t))(s)$ . Detta utvecklas till  $s^2F(s) - sf(0) - f'(0) + 3sF(s) - 3f(0)$ , och insättning av begynnelsevillkor ger  $(s^2 + 3s)F(s) - s - 3$ . Högerledets Laplacetransform är  $\mathcal{L}(e^{-t})(s) = \frac{1}{s+1}$ . Slutligen fås så uttrycket  $F(s)(s^2 + 3s) - s - 3 = \frac{1}{s+1} \Rightarrow F(s) = \frac{4+4s+s^2}{(s+1)(s^2+3s)}$ .  
 (b) Låt Laplacetransformen av  $f(t)$  vara  $F(s)$ . Laplacetransformen av vänsterledet kan med hjälp av linjäritet skrivas om som  $\mathcal{L}(f''(t) - 2f'(t))(s) = \mathcal{L}(f''(t))(s) - 2\mathcal{L}(f'(t))(s)$ . Detta utvecklas till  $s^2F(s) - sf(0) - f'(0) - 2sF(s) + 2f(0)$ , och insättning av begynnelsevillkor ger  $(s^2 - 2s)F(s) - 2$ . Högerledets Laplacetransform är  $\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$ . Slutligen fås så uttrycket  $F(s)(s^2 + 3s) - 2 = \frac{2}{s^3} \Rightarrow F(s) = \frac{2+s^3}{s^3(s^2-2s)}$ .  
 (c) Låt Laplacetransformen av  $f(t)$  vara  $F(s)$ . Laplacetransformen av vänsterledet kan med hjälp av linjäritet skrivas om som  $\mathcal{L}(4f''(t) + f'(t) + 3f(t))(s) = 4\mathcal{L}(f''(t))(s) + \mathcal{L}(f'(t))(s) + 3\mathcal{L}(f(t))(s)$ . Detta utvecklas till  $4s^2F(s) - 4sf(0) - 4f'(0) + sF(s) - f(0) + 3F(s)$ , och insättning av begynnelsevillkor ger  $(4s^2 + s + 3)F(s) - 4s - 9$ . Högerledets Laplacetransform är  $\mathcal{L}(\sin(2t))(s) = \frac{2}{s^2+4}$ . Slutligen fås så uttrycket  $F(s)(4s^2 + s + 3) - 4s - 9 = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow F(s) = \frac{38+16s+9s^2+4s^3}{(s^2+4)(4s^2+s+3)}$ .  
 (d) Låt Laplacetransformen av  $f(t)$  vara  $F(s)$ . Laplacetransformen av vänsterledet kan med hjälp av linjäritet skrivas om som  $\mathcal{L}(f''''(t) + 2f''(t) + f(t))(s) = \mathcal{L}(f''''(t))(s) + 2\mathcal{L}(f''(t))(s) + \mathcal{L}(f(t))(s)$ . Detta utvecklas till  $s^4F(s) - s^3f(0) - f''(0) - f'(0) - f(0) + 2s^2F(s) - 2sf(0) - 2f'(0) + F(s)$ , och insättning av begynnelsevillkor ger  $(s^3 + 2s^2 + 1)F(s) - s^2 - 3s - 5$ . Högerledets Laplacetransform är  $\mathcal{L}(10)(s) = \frac{10}{s}$ . Slutligen fås så uttrycket  $F(s)(s^3 + 2s^2 + 1) - s^2 - 3s - 5 - 9 = \frac{10}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{10+5s+3s^2+s^3}{s(s^3+2s^2+1)}$

**Ö4.13** (a) Låt  $g(t) = tf(t)$  där  $f(t) = \cos(t)$ . Då gäller  $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$  enligt Sats 4.7  $G(s) = -F'(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ . (b) Låt  $g(t) = tf(t)$  där  $f(t) = \sin(3t)$ . Då gäller  $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$  vilket ger  $G(s) =$

$-F'(s) = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$  (c) Låt  $g(t) = tf(t)$  där  $f(t) = e^{3t}$ . Då gäller  $F(s) = \frac{1}{s-3}$  vilket ger  $G(s) = -F'(s) = \frac{1}{(s-3)^2}$  (d) Låt  $g(t) = tf(t)$  där  $f(t) = te^{3t}$ . Då gäller  $F(s) = \frac{1}{(s-3)^2}$  vilket ger  $G(s) = -F'(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$

**Ö4.14** (a) En funktion  $g(v)$  som integreras med avseende på  $v$  på intervallet  $[0, t]$  är detsamma som Laplacetransformen av samma funktion dividerat med  $s$ :  $\int_0^t g(v)dv = \frac{G(s)}{s} = F(s)$ . Anta  $g(v) = \cos(v)$ , vilket ger  $G(s) = \frac{s}{s^2+1}$ .  $F(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s^2+1}$  (b) Sätt  $g(v) = e^{2v}$ , vilket ger  $G(s) = \frac{1}{s-2}$ .  $F(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s^2-2s}$  (c) Sätt  $g(v) = ve^{-v}$ , vilket ger  $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ .  $F(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)^2}$  (d) Sätt  $g(t) = \sin(5t)$ . Derivering av  $g(t)$  ger  $f(t) \frac{d}{dt} \sin(5t) = 5\cos(5t)$ . Laplacetransformen kan nu enkelt beräknas till  $F(s) = 5 \frac{s}{s^2+25}$

**Ö4.15** (a) Högerledet:  $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ . Vänsterledet:  $\mathcal{L}(f'''(t) - f'(t) + f(t))(s) = \mathcal{L}(f'''(t))(s) - \mathcal{L}(f'(t))(s) + \mathcal{L}(f(t))(s)$  där  $\mathcal{L}(f'''(t))(s) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$ ,  $\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0)$ ,  $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$ . Med begynnelsevillkor fås  $s^3F(s) - s^2 - s - sF(s) + 1 + F(s) = \frac{1}{s^2}$   
 (b) Högerledet:  $\mathcal{L}(e^{2t})(s) = \frac{1}{s-2}$ . Vänsterledet:  $\mathcal{L}(f'''(t) + f''(t) - f(t))(s) = \mathcal{L}(f'''(t))(s) + \mathcal{L}(f''(t))(s) - \mathcal{L}(f(t))(s)$  där  $\mathcal{L}(f'''(t))(s) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$ ,  $\mathcal{L}(f''(t))(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ ,  $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$ . Med begynnelsevillkor fås  $s^3F(s) + s^2F(s) - 2s^2 - 3s - F(s) - 2 = \frac{1}{s-2}$   
 (c) Högerledet:  $\mathcal{L}(\cos(3t))(s) = \frac{s}{s^2+9}$ . Vänsterledet:  $\mathcal{L}(f''(t) + 5f'(t) - 5f(t))(s) = \mathcal{L}(f''(t))(s) + 5\mathcal{L}(f'(t))(s) - 5\mathcal{L}(f(t))(s)$  där  $\mathcal{L}(f''(t))(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ ,  $\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0)$ ,  $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$ . Med begynnelsevillkor fås  $s^2F(s) + 5sF(s) - s - 2F(s) - 7 = \frac{s}{s^2+9}$   
 (d) Högerledet:  $\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$ . Vänsterledet:  $\mathcal{L}(f''''(t) - 3f(t))(s) = \mathcal{L}(f''''(t))(s) - 3\mathcal{L}(f(t))(s)$  där  $\mathcal{L}(f''''(t))(s) = s^4F(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$ ,  $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$ . Med begynnelsevillkor fås  $s^4F(s) - 2s^3 - s^2 - s - 3F(s) - 2 = \frac{2}{s^3}$

**Ö4.16** (a) Vi vet att funktionen  $f(t) = 1$  har transform  $F(s) = \frac{1}{s}$  och funktionen  $g(t) = e^{-t}$  har transform  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ . Eftersom  $H(s) = F(s) \cdot G(s)$  ges  $h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}$ .  
 (b) Vi vet att funktionen  $f(t) = t$  har transform  $F(s) = \frac{1}{s^2}$  och funktionen  $g(t) = \sin(2t)$  har transform  $G(s) = \frac{2}{s^2+4}$ . Eftersom  $H(s) = F(s) \cdot G(s)$  ges  $h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) \cdot \sin(2\tau) d\tau = \frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t))$ .  
 (c) Vi vet att funktionen  $f(t) = e^{2t}$  har transform  $F(s) = \frac{1}{s-2}$  och funktionen  $g(t) = e^{-2t}$  har transform  $G(s) = \frac{1}{s+2}$ . Eftersom  $H(s) = F(s) \cdot G(s)$  ges  $h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t e^{2(t-\tau)} \cdot e^{-2\tau} d\tau = \frac{e^{2t}}{4} - \frac{e^{-2t}}{4}$ .  
 (d) Vi vet att funktionen  $f(t) = \cos(t)$  har transform  $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$  och funktionen  $g(t) = \cos(2t)$  har transform  $G(s) = \frac{s}{s^2+4}$ . Eftersom  $H(s) = F(s) \cdot G(s)$  ges  $h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t \cos(t-\tau) \cdot \cos(2\tau) d\tau = \frac{1}{3}\sin(t)(4\cos(t) - 1)$ .

**Ö4.17** (a) Vi vet att  $\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = e^{-st_0}$ . Alltså blir  $\mathcal{L}(f(t) = 3\mathcal{L}(\delta(t-2))(s) + \mathcal{L}(\delta(t-1))(s) = 3e^{-2s} + e^{-s}$ .  
 (b) Vi vet att  $\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = e^{-st_0}$ . Alltså blir  $\mathcal{L}(f(t) = 2\mathcal{L}(\delta(t+2))(s) - \mathcal{L}(\delta(t+1))(s) = 2e^{2s} - e^s$ .

- (c) Vi vet att  $\mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s) = e^{-st_0}$ . Vidare är  $\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$ . Alltså blir  $\mathcal{L}(f(t) = \mathcal{L}(\delta(t + 1)))(s) + \mathcal{L}(\delta(t))(s) = e^{-s} + 1$ .  
 (d) Vi får  $\mathcal{L}(f(t) = -2\mathcal{L}(\delta(t - 2)))(s) + 2\mathcal{L}(\delta(t - 2))(s) = 0$  eftersom termerna tar ut varandra.

- Ö4.18** (a)  $\int_{-1}^1 \delta_\epsilon \cos(x) dx = \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^\epsilon \cos(x) dx = \frac{1}{2\epsilon} \cos(c_\epsilon)$  för något  $c_\epsilon \in [-\epsilon, \epsilon]$ . När vi låter  $\epsilon \rightarrow 0$  går  $c_\epsilon$  mot 0 och  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \delta_\epsilon \cos(x) dx = 1$   
 (b)  $\int_{-\infty}^\infty \delta_\epsilon x^2 dx = \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^\epsilon x^2 dx = \frac{1}{2\epsilon} [x^3/3]_{-\epsilon}^\epsilon = \frac{1}{2\epsilon} (\epsilon^3/3 + \epsilon^3/3) = \frac{\epsilon^2}{3}$ . När vi låter  $\epsilon \rightarrow 0$  går  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \delta_\epsilon x^2 dx = 0$   
 (c)  $\int_{-1}^1 \delta_\epsilon e^{2x} dx = \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^\epsilon e^{2x} dx = \frac{1}{2\epsilon} [\frac{e^{2x}}{2}]_{-\epsilon}^\epsilon = \frac{1}{4\epsilon} (e^{2\epsilon} - e^{-2\epsilon})$ . När vi låter  $\epsilon \rightarrow 0$  går  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \delta_\epsilon e^{2x} dx = 1$   
 (d)  $\int_{-1}^1 \delta_\epsilon x \sin(x) dx = \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^\epsilon x \sin(x) dx = \frac{1}{2\epsilon} [\sin(x) - x \cos(x)]_{-\epsilon}^\epsilon = \frac{1}{2\epsilon} (2 \sin(\epsilon) - 2\epsilon \cos(\epsilon)) = \frac{\sin(\epsilon) - \epsilon \cos(\epsilon)}{\epsilon}$ . När vi låter  $\epsilon \rightarrow 0$  går  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \delta_\epsilon x \sin(x) dx = 0$

- Ö4.19** (a) Vi har att  $f(t) = \theta(t - T)e^{-t} = e^{-T}\theta(t - T)e^{-(t-T)}$ . Vi får  $F(s) = e^{-T} \frac{e^{-Ts}}{s+1} = \frac{e^{-T(s+1)}}{s+1}$ .  
 (b) Vi har att  $f(t) = t^2\theta(t - T)$ . Vi får  $F(s) = \frac{2e^{-Ts}}{s^3}$ .  
 (c) Vi har att  $f(t) = \sin(2t)\theta(t - 3T)$ . Vi får  $F(s) = \frac{2e^{-3Ts}}{s^2+4}$ .  
 (d) Vi har att  $f(t) = \theta(t - T)t^2e^{-t}$ . Vi får  $F(s) = \frac{2e^{-Ts}}{(s+1)^3}$ .

- Ö4.20** (a)  $F(s) = \int_0^2 e^{-st} dt = [-\frac{e^{-st}}{s}]_0^2 = \frac{1-e^{-2s}}{s}$ .  
 (b)  $F(s) = \int_{-2}^2 e^{-st} dt = [-\frac{e^{-st}}{s}]_{-2}^2 = \frac{e^{2s}-e^{-2s}}{s}$ .  
 (c)  $F(s) = \int_{-1}^3 e^{-st} dt = [-\frac{e^{-st}}{s}]_{-1}^3 = \frac{e^s-e^{-3s}}{s}$ .  
 (d)  $F(s) = \int_k^m e^{-st} dt = [-\frac{e^{-st}}{s}]_k^m = \frac{e^{-ms}-e^{-ks}}{s}$ .

- Ö4.21** (a) Laplacetransformering av uttrycket ger  $s^2U(s) - su(0) - u'(0) = 1$ . Med begynnelsevillkor  $u(0) = 0, u'(0) = 0$  fås  $s^2U(s) = 1$  vilket ger  $U(s) = \frac{1}{s^2}$  eller  $u(t) = t, t \geq 0$ .  
 (b) Laplacetransformering av uttrycket ger  $sU(s) - u(0) + 2U(s) = \frac{1}{s^2}$ . Med begynnelsevillkor  $u(0) = 0$  fås  $(s+2)U(s) = \frac{1}{s^2}$  vilket ger  $U(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$  vars inversa Laplacetransform är  $u(t) = \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4}$ .  
 (c) Laplacetransformering av uttrycket ger  $s^2U(s) - su(0) - u'(0) - U(s) = \frac{1}{s+2}$ . Med begynnelsevillkor  $u(0) = 0, u'(0) = -1$  fås  $(s^2 - 1)U(s) + 1 = \frac{1}{s+2} \Rightarrow (s^2 - 1)U(s) = \frac{1}{s+2} - 1 = \frac{1}{s+2} - \frac{s+2}{s+2} = \frac{-(s+1)}{s+2}$ . Detta ger  $U(s) = \frac{-(s+1)}{(s^2-1)(s+2)} = \frac{-(s+1)}{(s+1)(s-1)(s+2)} = \frac{-1}{(s-1)(s+2)}$ . Den inversa Laplacetransformen är  $u(t) = \frac{-1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}$ .  
 (d) Laplacetransformering av uttrycket ger  $s^2U(s) - su(0) - u'(0) + 9U(s) = \frac{3}{s}$ . Med begynnelsevillkor  $u(0) = 0, u'(0) = 0$  fås  $(s^2 + 9)U(s) = \frac{3}{s}$ . Detta ger  $U(s) = \frac{3}{s(s^2+9)}$ . Den inversa Laplacetransformen av detta är  $u(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(3t)$ .

- Ö4.22** (a) Laplacetransformering av uttrycket ger  $sU(s) - u(0) + kU(s) = \frac{1}{s^2}$ . Med begynnelsevillkor  $u(0) = 0$  fås  $sU(s) + kU(s) = (s+k)U(s) = \frac{1}{s^2}$  vilket ger  $U(s) = \frac{1}{(s+k)s^2}$ . Partialbråksuppdelning med  $\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+k} = \frac{As+Ak+Bs^2+Bsk+Cs^2}{s^2(s+k)}$ . Efter lösning av ekvationssystemet  $Ak = 1, A + Bk = 0, B + C = 0$  fås  $A = 1/k, B = -1/k^2, C = 1/k^2$  vilket alltså ger  $U(s) = \frac{1}{ks^2} - \frac{1}{k^2s} + \frac{1}{k^2(s+k)}$ . Nu kan Laplaceinversen lätt beräknas och blir då  $u(t) = t/k - 1/k^2 + e^{-kt}/k^2$ .  
 (b) Laplacetransformering av uttrycket ger  $sU(s) - u(0) + U(s) = \frac{1}{s-1}$ . Med begynnelsevillkor  $u(0) = 2$  fås  $sU(s) - 2 + U(s) = (s+1)U(s) = \frac{1}{s-1} + 2$  vilket ger  $U(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} +$

$\frac{2}{s+1}$ . Partialbråksuppdelning första termen med  $\frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{s+1} = \frac{As-A+Bs+B}{(s-1)(s+1)}$ . Efter lösning av ekvationssystemet  $A+B=0$ ,  $-A+B=1$  fås  $A=-1/2$ ,  $B=1/2$  vilket alltså ger  $U(s) = \frac{-1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)} + \frac{2}{(s+1)}$   $= \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{2} \frac{1}{s+1}$ . Nu kan Laplaceinversen lätt beräknas och blir då  $u(t) = 1/2e^t + 3/2e^{-t}$ .

(c) Laplacetransformering av uttrycket ger  $s^2U(s) - su(0) - u'(0) = \frac{24}{s^3}$ . Med begynnelsevillkor  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$  fås  $s^2U(s) = \frac{24}{s^3}$  vilket ger  $U(s) = \frac{24}{s^5}$ . Nu kan Laplaceinversen lätt beräknas och blir då  $u(t) = t^4$ .

(d) Laplacetransformering av uttrycket ger  $sU(s) - u(0) + 3U(s) = \frac{3}{s}$ . Med begynnelsevillkor  $u(0) = 1$  fås  $(s+3)U(s) - 1 = \frac{3}{s} \Rightarrow (s+3)U(s) = \frac{3}{s} + 1 = \frac{3+s}{s}$  vilket ger  $U(s) = \frac{1}{s}$  vars Laplaceinvers är  $u(t) = 1$

**Ö4.23** (a) Laplacetransform ger  $2sU(s) - 6 + 4U(s) = \frac{1}{s}$ . Alltså  $U(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1/2}{s(s+2)}$ . Vi partialbråksuppdelar den andra termen  $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$  där  $A = 1/2$  och  $B = -1/2$ . Alltså  $U(s) = \frac{11/4}{s+2} + \frac{1/4}{s}$ . Därför blir  $u(t) = \frac{1}{4} + \frac{11}{4}e^{-2t}$ .

(b) Laplacetransform ger  $s^2U(s) - su(0) - u'(0) + 9U(s) = 3$ . Insättning av begynnelsevillkor  $u(0) = -9$ ,  $u'(0) = 0$  ger  $(s^2+9)U(s) = 3 - 9s$  vilket ger  $U(s) = \frac{3}{s^2+9} - \frac{9s}{s^2+9}$  vilket ger  $u(t) = \sin(3t) - 9\cos(3t)$

(c) Laplacetransform ger  $sU(s) - u(0) - 3U(s) = \frac{1}{s-1}$ . Insättning av begynnelsevillkor  $u(0) = 2$  ger  $(s-3)U(s) - 2 = \frac{1}{s-1} \Rightarrow (s-3)U(s) = \frac{1}{s-1} + 2$  vilket ger  $U(s) = \frac{1}{(s-1)(s-3)} + \frac{2}{s-3}$ . Partialbråksuppdelning av första termen ger  $\frac{1}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} = \frac{As-3A+Bs-B}{(s-1)(s-3)}$  vilket ger  $A = -1/2$ ,  $B = 1/2$ . Alltså fås  $U(s) = \frac{-1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-3)} + \frac{2}{s-3}$  vars Laplaceinvers är  $u(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{5}{2}e^{3t}$

(d) Laplacetransform ger  $sU(s) - u(0) = \frac{3}{s^2+9}$ . Insättning av begynnelsevillkor  $u(0) = 4$  ger  $sU(s) - 4 = \frac{3}{s^2+9}$  vilket ger  $U(s) = \frac{3}{s(s^2+9)} + \frac{4}{s}$ . Partialbråksuppdelning av första termen ger  $\frac{As+B}{s^2+9} + \frac{C}{s} = \frac{As^2+Cs+Bs^2+9B}{s(s^2+9)}$  vilket ger  $A = -1/3$ ,  $B = 1/3$ ,  $C = 0$ . Alltså fås  $U(s) = \frac{-1}{3} \frac{s}{s^2+9} + \frac{13}{3s}$  vars Laplaceinvers är  $u(t) = \frac{-1}{3}\cos(3t) + \frac{13}{3}$

**Ö4.24** (a) Vi får  $\frac{1}{s}U(s) + 3U(s) = \frac{2}{s}$  vilket ger  $U(s) = \frac{2}{3s+1} = \frac{2/3}{s+1/3} \Rightarrow u(t) = \frac{2}{3}e^{-t/3}$ .

(b) Laplacetransform ger  $\frac{3}{s}U(s) + 3U(s) = \frac{-1}{s^2} \Rightarrow (3+s)U(s) = \frac{-1}{s}$  vilket ger  $U(s) = \frac{-1}{s(s+3)}$ . Partialbråksuppdelning ger  $\frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} = \frac{As+3a+Bs}{s(s+3)}$  vilket ger  $A = -1/3$ ,  $B = 1/3$ . Alltså fås  $U(s) = \frac{-1}{3s} + \frac{1}{3(s+3)}$  vars Laplaceinvers är  $u(t) = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t}$

(c) Laplacetransformering ger  $\frac{4}{s}U(s) + sU(s) - u(0) = \frac{2}{s} \Rightarrow (4+s^2)U(s) = 2$  vilket ger  $U(s) = \frac{2}{4+s^2}$  vars Laplaceinvers är  $u(t) = \sin(2t)$ .

(d) Laplacetransform ger  $\frac{1}{s}U(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow U(s) = \frac{2}{s^2}$  vars Laplaceinvers är  $u(t) = 2t$

**Ö4.25** (a) Vi får  $s^2U(s) - s + 1 + U(s) = 0$  vilket ger  $U(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$  och därmed  $u(t) = \cos(t) - \sin(t)$ .

(b) Laplacetransform ger  $2s^2U(s) - 2su(0) - 2u'(0) - sU(s) + su(0) = \frac{-1}{s}$ . Med begynnelsevillkor fås  $2s^2U(s) - sU(s) = \frac{-1}{s}$  vilket ger  $U(s) = \frac{-1}{s^2(2s-1)}$ . Partialbråksuppdelning ger  $\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{2s-1}$  som är giltig med  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $C = -4$ . Alltså fås  $U(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1/2}$  vars Laplaceinvers är  $u(t) = t + 2 - 2e^{1/2t}$

(c) Laplacetransform ger  $sU(s) - u(0) + 4U(s) = 1$  vilket ger  $U(s) = \frac{4}{s+4}$  vars Laplacetransform är  $u(t) = 4e^{-4t}$

(d) Laplacetransform ger  $s^2U(s) - su(0) - u'(0) + 4U(s) = \frac{1}{s-2}$ . Med begynnelsevillkor fås

$(s^2 + 4)U(s) = \frac{1}{s-2} + 2$  vilket ger  $U(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+4)} + \frac{2}{s^2+4}$ . Laplacetransformen av detta uttryck kan enkelt beräknas och blir  $u(t) = \frac{1}{8}(e^{2t} + 7 \sin(2t) - \cos(2t))$ .

### Problem

**P4.1** Låt  $s \in \mathbb{R}$  sådan att  $s > a$ . Vi har  $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = [f(t)\frac{e^{-st}}{s}]_0^\infty - \frac{1}{s} \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt$ . Eftersom både  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  och  $|f'(t)| \leq Ce^{at}$  gäller att,

$$|F(s)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Ce^{(a-s)t}}{s} + \frac{|f(0)|}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\infty Ce^{(a-s)t} dt \leq \frac{C'}{s},$$

vilket innebär att  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ .

**P4.2** Vi har

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F(z) dz &= \int_z^\infty \int_0^t f(t)e^{-zt} dt dz \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_s^\infty e^{-zt} dz dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[-\frac{e^{-zt}}{t}\right]_s^\infty dt \\ &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s). \end{aligned}$$

**P4.3** Först noterar vi att  $t^n = e^{n \ln(t)} \leq e^{nt}$  alltså gäller begränsningen med  $C = 1$ ,  $a = n$ . Låt  $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = [t^n \frac{e^{-st}}{-s}]_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} I_{n-1}$ . Vi har även att  $I_0 = \frac{1}{s}$ . Rekursion ger  $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ .

**P4.4** Efter substitutionen  $\tau = t + 1$  har vi  $\int_0^\infty \sin(t+1)e^{st} dt = e^{-s} \int_1^\infty \sin(\tau)e^{s\tau} d\tau$ . Vi använder den komplexa omskrivningen av sinus för att få,

$$\int_0^\infty \sin(t+1)e^{st} dt = \frac{e^{-s}}{2i} \int_1^\infty e^{(s+i)\tau} - e^{(s-i)\tau} d\tau = \frac{e^{-s}}{2i} \left[ \frac{e^{(s+i)\tau}}{s+i} - \frac{e^{(s-i)\tau}}{s-i} \right]_1^\infty = \frac{s \cdot \sin(1) + \cos(1)}{s^2 + 1}.$$

**P4.5** Vi har  $(s^2 + 2s + 1)Y(s) + 1 = F(s)$  detta ger  $Y(s) = F(s)(1+s)^{-2} - (1+s)^{-2}$ . Transformerar vi tillbaka får vi:  $y(t) = \int_0^t f(t-\tau)\tau e^{-\tau} d\tau - te^{-t}$  eftersom  $te^{-t}$  har Laplacetransform  $(1+s)^{-2}$ .

## Kapitel 5

---

### Övningar

**Ö5.1** (a)  $[2 \ 4 \ -3]$  (b)  $[6 \ 0 \ -5]$  (c)  $[0 \ 9 \ -3]$  (d)  $[2 \ -5 \ 0]$

**Ö5.2** (a)  $\sqrt{29}/2$  (b)  $\sqrt{5}$  (c) 4 (d)  $\sqrt{n}$

**Ö5.3** (a)  $-5$  (b)  $2$  (c)  $-1$  (d)  $30$

**Ö5.4** (a)  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (b)  $\theta = \arccos(\frac{-\sqrt{2}}{3})$  (c)  $\theta = \frac{\pi}{3}$  (d)  $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$

**Ö5.5** (a)  $x = 1$  och  $y = 2$  (b)  $x = 1$  och  $y = 1$  (c)  $x = 1, y = 2$  och  $z = 3$  (d)  $x = 7, y = 1$  och  $z = 1$

**Ö5.6** (a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Ö5.7** (a)  $[7 \ -1 \ 2]^T$  (b)  $[-1 \ 7 \ 6]^T$  (c)  $[6.5 \ -0.5 \ 2]^T$  (d)  $[4 \ 1 \ 3]^T$

**Ö5.8** (a) Första ekvationen ger  $\dot{u} + v = 0$  alltså  $v = -\dot{u}$ . Sätt in detta i andra ekvationen,  $0 = \dot{v} - 4u = -\ddot{u} - 4u$ . Lösningen till ekvationen  $\ddot{u} + 4u = 0$  ges av  $u(t) = A \sin(2t) + B \cos(2t)$  (den karakteristiska ekvationen är  $r^2 + 4 = 0$  med lösning  $r_1 = 2i$  och  $r_2 = -2i$  vilket ger lösningar  $u(t) = C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it}$ , realdelen av detta ger lösningen), begynnelsevillkoren ger  $u(t) = -\frac{1}{2} \sin(2t)$  och  $v(t) = \cos(2t)$ . (b) Vi får  $\ddot{u} - u = 0$  med lösningar  $u(t) = Ae^t + Be^{-t}$ . Begynnelsevillkoren ger  $A = B = 1/2$  så  $u(t) = (e^t + e^{-t})/2$  och  $v(t) = (e^t - e^{-t})/2$ . (c) Vi får  $\ddot{u} + 2\dot{u} + u = 0$  med lösningar  $u(t) = (At + B)e^{-t}$ . Begynnelsevillkoren ger  $A = 0$  och  $B = 1$ ,  $u(t) = e^{-t}$   $v(t) = -e^{-t}$ . (d) Vi får två oberoende ekvationer  $\dot{u} = 3u$  och  $\dot{v} = 4v$ . Tillsammans med begynnelsevillkoren får vi  $u(t) = 2e^{3t}$  och  $v(t) = e^{4t}$ .

**Ö5.9** (a) Vi får  $u''(t) = tu(t)^2$ .

(b) Vi får  $u''(t) = \sin(u(t))$ .

(c) Vi får  $u''(t) = 2u_2(t)u_2'(t) = 2u_2(t)u(t) = 2\sqrt{u'(t)}u(t)$ .

(d) Vi deriverar första ekvationen och sätter in  $u_2' = u_1$  vilket ger  $u_1'' = u_1' + u_1$ .

**Ö5.10** (a) Första ekvationen ger  $\dot{u} + v = 0$ , alltså  $v = -\dot{u}$ . Andra ekvationen ger då med  $v = -\dot{u}$  att  $\dot{v} + v^2 = -\ddot{u} + (\dot{u})^2 = 0$ ,  $u(0) = 0$ , och  $\dot{u}(0) = 1$ . Lösningen till  $\dot{v} + v^2 = 0$  med  $v(0) = 1$  ges av  $v(t) = \frac{1}{1+t}$  (separabel  $v^{-1} = -\int v^{-2} dv = \int dt = t + C$  medför  $v(t) = \frac{1}{t+C}$ ,  $v(0) = 1$  medför  $C = 1$ )  $u(t) = -\int_0^t \frac{1}{1+\tau} d\tau = -\log(1+t) + C$ ,  $u(0) = 0$  ger  $u(t) = -\log(1+t)$  och  $v(t) = \frac{1}{1+t}$ .

(b) Första ekvationen ger  $u(t) = t^2/2 + A$  där  $A = 0$  på grund av begynnelsevillkor. Sedan ger andra ekvationen att  $v(t) = t^5/20 + B$  där  $B = 1$  på grund av begynnelsevillkor. Lösningar ges

av  $u(t) = t^2/2$  och  $v(t) = 1 + t^5/20$ .

(c) I  $u$  får vi  $\dot{u} = tu^2$  som är separabel. Vi får  $\int \frac{du}{u^2} = \int t dt$  eller  $-\frac{1}{u} = t^2/2 + A$  där  $A = 1/2$  på grund av begynnelsevillkor. Vi får  $u(t) = -2/(1 + t^2)$  och  $v(t) = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -2 \arctan(t) + B$ . Begynnelsevillkoret  $v(0) = 0$  ger  $B = 0$ . Alltså  $v(t) = -2 \arctan(t)$ .

(d) Första ekvationen ger  $u(t) = e^t$ . Den andra ekvationen kan lösas med integrerande faktor eftersom  $\dot{v} - v = e^{2t}$ . Lösningen ges av  $v(t) = e^{2t}$ .

- Ö5.11** (a) Vi deriverar den första  $\ddot{u}_1 + \dot{u}_2 = 2 \cos(2t)$  och sätter in  $\dot{u}_2 = u_1 + \cos(2t)$  vilket ger  $\ddot{u}_1 + u_1 = \cos(2t)$ . Vi har  $u_1(0) = 1$  och  $\dot{u}_1(0) = -u_2(0) + \sin(2 \cdot 0) = -1$ . Den karakteristiska ekvationen  $r^2 + 1 = 0$  har rötter  $r_{1/2} = \pm i$  så  $u_h(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ . Vi ansätter  $u_p(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$  vilket ger  $-3A \cos(2t) - 3B \sin(2t) = \cos(2t)$  som uppfylls då  $A = -1/3$  och  $B = 0$ . Vi har  $u_1(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) - 1/3 \cos(2t)$ . Begynnelsevillkoren ger  $C_1 = 4/3$  och  $C_2 = -1$ . Vi får då att  $u_2(t) = \sin(2t) - \dot{u}_1(t) = \sin(2t) + \frac{4}{3} \sin(t) + \cos(t) - \frac{2}{3} \sin(2t)$ .
- (b)  $u_1(t) = -\frac{1}{2} + e^{-2t}$ ,  $u_2(t) = -2e^{-2t}$ .
- (c)  $u_1(t) = (1 - t/5)e^{-2t}$ ,  $u_2(t) = (-11/5 + 2t/5)e^{-2t}$ .
- (d)  $u_1' + k^2 u_2 = 0$  och  $u_2' = -u_1$  alltså  $u_2'' - k^2 u_2 = 0$ . Begynnelsevillkor ger lösningen  $u_2(t) = (e^{kt} - e^{-kt})/2$  och  $u_1(t) = -k(e^{kt} + e^{-kt})/2$ .

- Ö5.12** Matrisekvationen ger  $u_1' = -u_3$ ,  $u_2' = -u_1 + u_3$  och  $u_3' = 2u_1 + u_2 + 0.5u_3$ . Vi deriverar den första relationen två gånger  $u_1^{(3)} = -u_3''$  och den tredje en gång  $u_3' = 2u_1' + u_2' + 0.5u_3'$  för att få  $u_1^{(3)} = -2u_1' - u_2' - 0.5u_3'$ . Här får vi  $u_2'$  från den andra ekvationen och  $u_3' = -u_1''$  från den första ekvationen. Alltså  $u_1^{(3)} = -2u_1' + u_1 - u_3 + 0.5u_1'' = -2u_1' + u_1 + u_1' + 0.5u_1''$ . Begynnelsevillkoren ger  $u_1(0) = 2$ . Första ekvationen i systemet ger  $u_1'(0) = -u_3(0) = 1$ . Genom att derivera den första ekvationen och använda den tredje får vi  $u_1''(0) = -u_3'(0) = -2u_1(0) - u_2(0) - 0.5u_3(0) = -9/2$ . Genom att använda alla ekvationer får vi slutligen också

$$\begin{aligned} u_1^{(3)}(0) &= -u_3''(0) = -2u_1'(0) - u_2'(0) - 0.5u_3'(0) = \\ &= -2(-u_3(0)) - (-u_1(0) + u_3(0)) - \\ &\quad -0.5(2u_1(0) + u_2(0) + 0.5u_3(0)) = -5/4. \end{aligned}$$

- Ö5.13** Låt  $v = \dot{u}$ . Vi får då,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karakteristiska ekvationen  $r^2 - 2r - 3 = 0$  har lösningar  $r = -1$  och  $r = 3$ . Homogenlösningen ges av  $u_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$  och partikulärlösningen  $u_p(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ . Begynnelsevillkoren ger  $u(0) = C_1 + C_2 + \frac{2}{9} = 1$  och  $u'(0) = -C_1 + 3C_2 - \frac{1}{3} = 0$  alltså  $u(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{18}e^{3x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ .

- Ö5.14** Låt  $u = u$  och  $v = u'$ ,

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v \\ \sin(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \cos(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ö5.15** Låt  $u_1 = u$ ,  $u_2 = u'$  och  $u_3 = u''$ . Vi får,

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ x - x \sin(u_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



**Ö5.16** Låt  $u_1 = u$  och  $u_2 = u'$ . Vi har  $u'_1 = u' = u_2$  och  $u'_2 = u'' = -3u_1 + 8u_2 + xe^x$ . Begynnelsevillkoren blir  $u_1(0) = u(0) = 2$  och  $u_2(0) = u'(0) = 3$ . Systemet kan även skrivas på matrisform

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ xe^x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**Ö5.17** Sätt  $u_1 := u, u_2 := u', u_3 := u''$  och  $u_4 := u^{(3)}$ . Vi uttrycker de nya variabelernas förstaderivator med hjälp av  $u_1, u_2, u_3, u_4$ ,

$$\begin{aligned} u'_1 &= u' = u_2, \\ u'_2 &= u'' = u_3, \\ u'_3 &= u^{(3)} = u_4, \\ u'_4 &= u^{(4)} = -xu_1 - 3u_2 + 2u_3 + e^{2x} + \cos(x). \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger  $u_1(0) = u(0) = 2, u_2(0) = u'(0) = 3, u_3(0) = u''(0) = 1$  och  $u_4(0) = u^{(3)}(0) = 2$ . Systemet även skrivas på matrisform

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -x & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{2x} + \cos(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \\ u_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Ö5.18** Låt  $u_1 = u$  och  $u_2 = u'$ . Vi får

$$\begin{aligned} u'_1 &= u' = u_2 \\ u'_2 &= u'' = -u_1^2 u_2 + e^x. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger  $u_1(0) = u(0) = -1$  och  $u_2(0) = u'(0) = 2$ . Systemet kan skrivas med vektornotation

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1^2 u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Ö5.19** Vi har

$$|\vec{f}(t, \vec{u}_1) - \vec{f}(t, \vec{u}_2)| \leq \sqrt{(v_2 - v_1)^2 + (4u_1 - 4u_2)^2} \leq 4\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} = 4|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|.$$

Sats 5.4 ger entydig lösning för alla  $t$ .

**Ö5.20** Vi har

$$|\vec{f}(t, \vec{u}_1) - \vec{f}(t, \vec{u}_2)| = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 + (v_1^2 - v_2^2)^2} = |v_1 - v_2| \sqrt{1 + (v_1 + v_2)^2}.$$

Vi drar slutsatsen att det ej finns någon Lipschitzkonstant eftersom för varje  $L > 0$  sådant att

$$|\vec{f}(t, \vec{u}_1) - \vec{f}(t, \vec{u}_2)| \leq L|\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = L\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2},$$

kan vi välja  $u_1 = u_2$  och  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$  sådana att  $\sqrt{1 + (v_1 + v_2)^2} > L$ .

- Ö5.21** Lipschitzkontinuitet i  $u = 0$  eftersom derivatan där är oändlig.
- Ö5.22** Vi har att  $u' = (u^2)' = 2uu' = 2(u^2) = 2u$  dessutom  $u(0) = (u^2)(0) = u(0)^2 = 1$ .
- Ö5.23** Vi har att  $xy = e^{\ln(xy)}$  eftersom  $\ln(x)$  är invers till  $e^x$ . Vi har även  $xy = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$ . Genom att ta logaritmen på båda sidor får vi  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ .
- Ö5.24** Vi har att  $e^{\ln(x^p)} = x^p = (e^{\ln(x)})^p = e^{p\ln(x)}$ . Genom att ta logaritmen på båda sidor får vi  $\ln(x^p) = p\ln(x)$ .
- Ö5.25** Följer direkt genom insättning.

### Problem

- P5.1** Vi har  $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$ . Cosinussatsen ger då att  $-2\vec{v} \cdot \vec{w} = -2|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\theta)$  vilket ger resultatet efter division med  $-2$ .
- P5.2** Vi har två ekvationer  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$  och  $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ . Vi antar att  $a_{22} \neq 0$  och löser ut  $x_2$  ur andra ekvationen och sätter in i den första och får  $(a_{11} - a_{12}a_{21}a_{22}^{-1})x_1 = b_1 - b_2a_{12}a_{22}^{-1}$ . Om  $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$  har vi entydig lösning. Om  $a_{22} = 0$  får vi  $a_{21}x_1 = b_2$  med entydig lösning om  $a_{21} \neq 0$  och sedan unikt  $x_2$  om  $a_{12} \neq 0$ . Därmed ges entydighet även i detta fall av villkoret  $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ .
- P5.3** Ja, högerledet är Lipschitzkontinuerligt eftersom det består av (upp till kvadratiska) polynom som har begränsade derivator på området  $0 \leq x, y \leq 10$ . De stationära punkterna ges av  $x = y = 1$  och  $x = y = 0$ .
- P5.4** Vi antar  $\vec{u} \neq 0$  (om  $\vec{u} = 0$  håller resultatet trivialt) och får  $\vec{u}^T \frac{d}{dt} \vec{u} = \vec{u}^T A \vec{u} < 0$ . Tipset ger att  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_1(t)^2 + u_2(t)^2) = \vec{u}^T \frac{d}{dt} \vec{u} < 0$ . Vi noterar att  $u_1(t)^2 + u_2(t)^2 = |\vec{u}(t)|^2$ , integrerar från 0 till  $t$  och får  $|\vec{u}(t)|^2 - |\vec{u}_0|^2 < 0$  eller  $|\vec{u}(t)| \leq |\vec{u}_0|$ .
- P5.5** Vi har att

$$m_1 \ddot{x}_1(t) = -k_1 x_1(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)), \quad (30)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = -k_2 (x_2(t) - x_1(t)) - k_3 x_2(t). \quad (31)$$

Vi inför variablerna  $x_3(t) = \dot{x}_1(t)$  och  $x_4(t) = \dot{x}_2(t)$ . Vi får följande system,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k_1/m_1 & k_2/m_1 & 0 & 0 \\ k_2/m_2 & -2k_3/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

- P5.6** Ekvationen för den första planeten ges av  $m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_1(t) = -\frac{Gm_1 m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - \frac{Gm_1 m_3 (\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^3}$ . Vi dividerar med  $m_1$  och gör samma härledning för de övriga två planeterna för att få

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_1(t) &= -\frac{Gm_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - \frac{Gm_3 (\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^3} \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_2(t) &= -\frac{Gm_1 (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} - \frac{Gm_3 (\vec{x}_2 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^3} \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_3(t) &= -\frac{Gm_1 (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|^3} - \frac{Gm_2 (\vec{x}_3 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|^3}. \end{aligned}$$

Vi låter nu  $\vec{x}_4 = \frac{d}{dt}\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_5 = \frac{d}{dt}\vec{x}_2$  och  $\vec{x}_6 = \frac{d}{dt}\vec{x}_3$  och får

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{x}_1(t) &= \vec{x}_4(t) \\ \frac{d}{dt}\vec{x}_2(t) &= \vec{x}_5(t) \\ \frac{d}{dt}\vec{x}_3(t) &= \vec{x}_6(t) \\ \frac{d}{dt}\vec{x}_4(t) &= -\frac{Gm_2(\vec{x}_1) - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - \frac{Gm_3(\vec{x}_1) - \vec{x}_3}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^3} \\ \frac{d}{dt}\vec{x}_5(t) &= -\frac{Gm_1(\vec{x}_2) - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} - \frac{Gm_3(\vec{x}_2) - \vec{x}_3}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^3} \\ \frac{d}{dt}\vec{x}_6(t) &= -\frac{Gm_1(\vec{x}_3) - \vec{x}_1}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|^3} - \frac{Gm_2(\vec{x}_3) - \vec{x}_2}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|^3}.\end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ges av  $\vec{x}_i(0)$  för  $i = 1, 2, 3$  och hastigheterna för  $i = 4, 5, 6$ . Notera att varje ekvation innehåller tre koordinater så vi har 18 ekvationer.

**P5.7** Låt  $u_1 = u$  och  $u_2 = u'$ . Vi får  $u'_1 = u_2$  och  $u'_2 = 4u_1$ . Därmed får vi att  $\frac{d}{dt}\vec{u} = A\vec{u}$  där  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ . Vi får

$$|A\vec{v} - A\vec{w}| = \left| \begin{bmatrix} v_2 - w_2 \\ 4v_1 - 4w_1 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(v_2 - w_2)^2 + 16(v_1 - w_1)^2} \leq 4|\vec{v} - \vec{w}|.$$

**P5.8** Vi har  $\frac{u_n - u_{n-1}}{1/n} = u_n$  eller

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{1 - \frac{1}{n}} = \dots = \frac{u_0}{(1 - 1/n)^n} = (1 - 1/n)^{-n},$$

eftersom  $u_0 = 1$ . Därför gäller

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/n)^{-n}.$$

**P5.9** Variabelseparation ger  $\int \frac{du}{1+u^2} = \int 1 dx = x + C$ . Därför får vi  $\arctan(u(x)) = x + C$ . Begynnelsevillkoret  $u(0) = 0$  ger  $0 = \arctan(0) = 0 + C$ . Alltså får vi  $u(x) = \tan(x)$ . Högerledet är inte Lipschitzkontinuerligt för alla  $u$  eftersom  $|1 - u_1^2 - 1 + u_2^2| = |u_1 + u_2||u_1 - u_2|$  och  $|u_1 + u_2|$  inte är begränsad av något  $L$  för alla  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ . Vi därför inte global existens men lokal existens i en omgivning till 0,  $-\delta < x < \delta$  för något  $\delta$ .

**P5.10** Vi multiplicerar ekvationen med  $u'$  och använder att  $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = vv'$  med  $v = u$  och  $v = u'$ . Vi får  $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}u'(x)^2 - u(x)^2 = u'(x)u''(x) - u(x)u'(x) = u'(x)(u''(x) - u(x)) = 0$ . Därför gäller att  $u'(x)^2 - u(x)^2 = C$  är konstant för alla  $x$ . Eftersom  $u'(0)^2 - u(0)^2 = 1$  är  $C = 1$ .

## Kapitel 6

### Övningar

**Ö6.1**  $y_n = (1 + \frac{1}{n})y_{n-1} = (1 + \frac{1}{n})^n y_0 = (1 + \frac{1}{n})^n$ .

**Ö6.2** Vi får  $y_n = (1 - \frac{2}{n})^{-1}y_{n-1} = \dots = (1 - \frac{2}{n})^{-n}$ .

**Ö6.3** Vi får  $y_1 = y_0 + 0.1 \cdot y_0^2 = 1.1$  och  $y_2 = y_1 + 0.1 \cdot y_1^2 = 1.1 + 0.1 \cdot 1.1^2 = 1.221$ .

**Ö6.4** Mittpunktsmetoden ger  $y_i = y_{i-1} + \frac{1}{n} \frac{y_i + y_{i-1}}{2}$  vilket ger

$$y_n = \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}} y_{n-1} = \left( \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}} \right)^n y_0 = \left( \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}} \right)^n.$$

**Ö6.5** Eulers metod ger  $y_1 = y_0 + k(1 - y_0^2) = 0.2$ . Vi får sedan att  $y_2 = y_1 + k(1 - y_1^2) = 0.2 + 0.2(1 - 0.04) = 0.3920$ .

**Ö6.6** Vi har  $y_1 = 1 + 0.2 \cdot 0 \cdot 1 = 1$  och  $y_2 = 1 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 1 = 1.04$ .

**Ö6.7** Explicit. Ingen algebraisk ekvation behöver lösas.

**Ö6.8** Låt  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y'$  och  $y_3 = y''$ .

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \sin(t) - y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Systemet kan lösas med text Bakåt Euler som är en första ordningens metod, alltså felet beror linjärt på steglängden.

**Ö6.9** Integrerande faktor ger att  $y(x) = 1 - x + e^{-x}$ . Därmed är  $|y''(x)| = |e^{-x}| \leq 1 = M$ . Lipschitz-konstanten med avseende på  $y$  för  $f(y) = x - y$  är  $L = 1$ . Vi får enligt sats 6.1 att  $|y(1) - y_{100}| \leq \frac{1}{200}(e - 1) = \frac{e-1}{200}$ .

**Ö6.10** Vi har  $|y''(x)| = |\sin(y(x))y'(x)| = |\sin(y(x))\cos(y(x))| = 0.5|\sin(2y(x))| \leq 0.5$ . Vidare är  $L = 1$  eftersom derivatan av  $\cos(y)$  är begränsad av 1. Sats 6.1 ger då  $|y(2) - y_{100}| \leq \frac{0.5 \cdot 0.02}{2 \cdot 1}(e^2 - 1) = 0.005(e^2 - 1)$ .

**Ö6.11** Vi har  $|y''| = |e^{-t}| \leq 1$  och även  $L = 1$  eftersom derivatan också är begränsad av 1. Sats 6.1 ger  $|y(T) - y_{10T}| \leq 0.05(e^T - 1)$ . För  $T = 3.045$  får vi  $0.05(e^T - 1) > 1$ .

**Ö6.12** Felet i Eulers metod är proportionellt mot steglängden  $Ck = C\pi/10 = 0.012$ . Det ger att  $C = 0.12/\pi$ . Ska felet vara 0.00064 krävs att  $Ck = 0.00064$  eller  $k = 0.0168$ .

**Ö6.13** Vi har  $\lambda = -10$ . Eulers metod är stabil om  $|1 + k\lambda| < 1$ . Det innebär att  $|1 - 10k| < 1$  eller  $k < 0.1$ . För bakåt Euler gäller  $|1 - k\lambda| > 1$  eller  $|1 + 10k| > 1$  vilket gäller för alla  $k$ .

**Ö6.14** Eftersom  $k\lambda < 0$  gäller att  $|1 - \frac{k\lambda}{2}| = 1 + |\frac{k\lambda}{2}| \geq |1 + \frac{k\lambda}{2}|$  vilket innebär stabilitet enligt sats 6.2.

**Ö6.15** Vi har att  $|1 - k\lambda| = 1 + |k\lambda| > 1$  vilket innebär stabilitet enligt sats 6.2.

**Ö6.16** Eulers metod:

$$\begin{bmatrix} u_i - u_{i-1} \\ v_i - v_{i-1} \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ x_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där,  $x_i = i \cdot k$ ,  $i = 0, 1, \dots$   $[u_1, v_1] = [1, 0.3]$ .

**Ö6.17** Euler metod

$$\begin{bmatrix} u_i - u_{i-1} \\ v_i - v_{i-1} \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där,  $x_i = i \cdot h, i = 0, 1, \dots$   $[u_1, v_1] = [0.1, 1]$ .

**Ö6.18** Bakåt Euler:

$$\begin{bmatrix} u_i - u_{i-1} \\ v_i - v_{i-1} \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ x_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där,  $x_i = i \cdot k, i = 0, 1, \dots$

**Ö6.19** Bakåt Euler:

$$\begin{bmatrix} u_i - u_{i-1} \\ v_i - v_{i-1} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där,  $x_i = i \cdot k, i = 0, 1, \dots$

**Ö6.20** Låt  $y_1 = y, y_2 = y'$ .

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \sin(t) - y_1^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med  $t_i = ik, i = 0, 1, \dots$ , ges Eulers metods lösning av:

$$\begin{bmatrix} y_1^i - y_1^{i-1} \\ y_2^i - y_2^{i-1} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} y_2^{i-1} \\ \sin t_{i-1} - (y_1^{i-1})^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (y_1)_0 \\ (y_2)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får  $y_1^1 = 1$  och  $y_2^1 = -0.1$ .

**Ö6.21** Med  $y_1 = y$  och  $y_2 = y'$  får vi,

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bakåt Euler ger,

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

Vi får att  $y_2^{(1)} = 0.4y_1^{(1)}$ . Insättning i första ekvationen ger  $y_1^{(1)} = 1 + 0.04y_1^{(1)}$  vilket ger  $y_1^{(1)} = \frac{25}{24}$  och  $y_2^{(1)} = \frac{5}{12}$ .

**Ö6.22**  $q(x) = -\frac{d^2}{dx^2}x^2(1-x) = 6x - 2$ .**Ö6.23**  $q(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\sin(\pi x) = \pi^2 \sin(\pi x)$ .**Ö6.24** Vi får  $\frac{d}{dx}u(x) = -\frac{x^3}{3} + C$  och  $u(x) = Cx + D - \frac{x^4}{12}$ . Randvillkoren ger  $0 = u(0) = D$  och  $u(1) = C - \frac{1}{12}$  vilket innebär  $C = \frac{1}{12}$ . Vi får  $u(x) = \frac{x}{12}(1-x^3)$ .**Ö6.25** Vi får  $\frac{d}{dx}u(x) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + C$  och  $u(x) = Cx + D + \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$ .  $0 = u(0) = D$  och  $0 = u(1) = C$  ges  $u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$ .

## Problem

**P6.1** Vi får att  $\tilde{y}_1 = 1 + 0.11^2 = 1.1$  och därmed  $y_1 = 1 + 0.05(1 + 1.1) = 1.105$ . Detta ger  $\tilde{y}_2 = y_1 + hy_1^2 = 1.2271$  och slutligen  $y_2 = 1.2216$ .

**P6.2** Eulers metod ger  $u_1 = u_0 + ku_0^{1/2} = 0$ . Sedan följer  $u_i = 0$  för alla  $i$ . Notera att  $u(t) = 0$  också löser ekvationen. Med bakåt Euler får vi  $u_1 = u_0 + ku_1^{1/2} = ku_1^{1/2}$  där  $u_1 = k^2$ . Vi får  $u_2 = u_1 + ku_2^{1/2}$  eller  $u_2 = k^2 + ku_2^{1/2}$ . Vi kan lösa detta som en andragradsekvation i variabeln  $z = u_2^{1/2}$  med lösningar  $z = \frac{k}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ . Endast den positiva roten löser ekvationen och vi får  $u_2 = \frac{k^2}{4}(1 + \sqrt{5})^2$ .

**P6.3** Vi studerar först det lokala trunkeringsfelet på intervallet  $[t_{i-1}, t_i]$ . Taylors formel ger att  $y(t_{i-1})$  kan uttryckas med en Taylor serie kring punkten  $y(t_i)$  som,

$$y(t_{i-1}) = y(t_i) - k \cdot y'(t_i) + \frac{k^2}{2}y''(\eta_i),$$

för något  $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Av ekvationen  $y'(t) = f(t, y(t))$  följer att,

$$y(t_{i-1}) = y(t_i) - kf(t_i, y(t_i)) + \frac{k^2}{2}y''(\eta_i).$$

Bakåt Euler ger att  $y_i = y_{i-1} + k \cdot f(t_i, y_i)$  eller  $y_{i-1} = y_i - k \cdot f(t_i, y_i)$ . Om vi låter  $e_i = y(t_i) - y_i$  har vi,

$$e_{i-1} = e_i - k(f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)) + \frac{k^2}{2}y''(\eta_i).$$

och eftersom  $f$  är Lipschitz-kontinuerlig med konstant  $L$  i det andra argumentet och andra derivatan av  $y$  är begränsad av  $M$  får vi,

$$|e_i| \leq |e_{i-1}| + kL|e_i| + \frac{k^2M}{2}.$$

Med  $kL < 1$  får vi,

$$|e_i| \leq (1 - kL)^{-1}|e_{i-1}| + \frac{k^2M}{2(1 - kL)}.$$

Om vi upprepar denna räkning från  $i = n$  ner till  $i = 1$  får vi det globala trunkeringsfelet,

$$|e_n| \leq (1 - kL)^{-1}|e_{n-1}| + \frac{k^2M}{2(1 - kL)} \quad (33)$$

$$\leq (1 - kL)^{-n}|e_0| + \frac{k^2M}{2(1 - kL)}(1 + (1 - kL)^{-1} + (1 - kL)^{-n}) \quad (34)$$

$$= \frac{k^2M}{2(1 - kL)} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - kL)^{-i}, \quad (35)$$

eftersom  $|e_0| = |y(t_0) - y_0| = 0$ . Summationsformeln för geometrisk summa ger

$$|y(t_n) - y_n| := |e_n| \leq \frac{kM}{2} \frac{(1 - kL)^{-n} - 1}{L}.$$

**P6.4** Från beviset av konvergensen i Eulers metod har vi att felet  $e_i = u(t_i) - u_i$  uppfyller

$$e_i = e_{i-1} + k(f(t_{i-1}, u_{i-1}) - f(t_{i-1}, u_i)) + \frac{k^2}{2}u''(\eta_i) = e_{i-1} + \frac{k^2}{2}u''(\eta_i).$$

Vi flyttar över  $e_{i-1}$  till vänstersidan, summerar för  $i = 1$  till  $n$ , och noterar att alla utom två termer kancellerar. Vi får  $|e_n - e_0| = \frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^n |u''(\eta_i)| \leq \frac{k^2 n M}{2}$ .

**P6.5** Vi låter  $f(t, y) = \lambda y$ . Vi få att  $\tilde{y}_i = (1 + k\lambda)y_{i-1}$  och

$$y_i = y_{i-1} + \frac{k}{2}(\lambda y_{i-1} + \lambda \tilde{y}_i) = (1 + \lambda k + \frac{\lambda^2 k^2}{2})y_{i-1}.$$

Därför ges stabilitetsområdet av  $\{k\lambda \in \mathbb{C} : |1 + \lambda k + \frac{\lambda^2 k^2}{2}| < 1\}$ .

**P6.6** Med  $f(u) = \lambda u$  får vi  $u_i = \frac{1+k(1-\theta)\lambda}{1-\theta k\lambda} u_{i-1} := g(k\lambda)u_{i-1}$ . Vi ser att  $|g(k\lambda)| < 1$  om  $|1 + (1 - \theta)k\lambda| < |1 - \theta k\lambda|$ . Antag  $k\lambda < 0$ . Vi får då  $|1 + (1 - \theta)k\lambda| < 1 - \theta k\lambda$  vilket är uppfyllt för alla  $\theta \geq \frac{1}{2}$ .

**P6.7** Låt  $u = y$  och  $v = y'$ . Vi får,

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 1 + x - v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med  $x_i = ik, i = 0, 1, \dots$ , ges Bakåt Euler lösningen av:

$$\begin{bmatrix} u^i - u^{i-1} \\ v^i - v^{i-1} \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} v^i \\ 1 + x_i - v^i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får  $u^1 = 1 + 0.1v^1$  och  $v^1 = 0.1(1.1 - v^1)$  vilket ger  $v^1 = 0.1$  och därmed  $u^1 = 1.01$ .

**P6.8** Låt  $u = u_1$  och  $z = z_1$ . Vi har  $u = 1 + kz/2$  och  $z = -ku/2$ . Alltså är  $u = (1 - k^2/4)/(1 + k^2/4)$  och  $z = -k/(1 + k^2/4)$ . Därför blir  $u^2 + v^2 = ((1 - k^2/4)^2 + k^2)/(1 + k^2/4)^2 = (1 + k^2/2 + k^4/16)/(1 + k^2/2 + k^4/16) = 1$ .

**P6.9** Vi får genom partiell integration att  $0 \leq \int_0^L u'(x)u'(x) dx = \int_0^L -u(x)''u(x) dx + 0 = q \int_0^L u(x) dx$ . Det går även att räkna ut lösningen analytiskt och använda att den är positiv.

**P6.10** Vi börjar från vänsterledet och får

$$\int_0^1 xq(x) dx = - \int_0^1 xu''(x) dx = -[u'(x)x]_0^1 + \int_0^1 u'(x) dx = -u'(1) + u(1) - u(0) = -u'(1).$$

## Kapitel 7

### Övningar

**Ö7.1** (a) Symmetri ger  $\bar{x} = 0$ .  $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$  och  $m = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$  varför  $\bar{y} = \frac{2}{5}$ .

(b) Arealen är  $m = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1$ . Momenten ges av  $M_{x=0} = \int_0^{\pi/2} x \cos(x) \, dx = [x \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx = \pi/2 - 1$  och  $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x)) \, dx = \frac{\pi}{8}$ . Därför får vi  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8})$ .

(c)  $x$  komponenten blir 0 på grund av symmetri. Arealen ges av  $\pi/2$ . Momentet i  $y$ -les  $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 - x^2 \, dx = \frac{2}{3}$ . Centroiden ges av  $(x_p, y_p) = (0, \frac{4}{3\pi})$ .

(d) Området är en triangel med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  och  $(\frac{3}{2}, 0)$ . Centroiden ges då av  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{0+1+1.5}{3}, \frac{0+1+0}{3}) = (\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$ .

**Ö7.2** (a) Symmetri ger  $\bar{x} = 0$ . Låt massan vara  $m$ . Momentet kring  $y = 0$  ges av  $M_{y=0} = m(0 + 2 - 1 + 4 + 2 + 0) = 7m$ . Den totala massan ges av  $6m$ . Därför får vi  $\bar{y} = \frac{7}{6}$ .

(b) Massan är  $m = \int_0^1 (1-x)(1+x) \, dx = \frac{2}{3}$ . Momenten ges av  $M_{x=0} = \int_0^1 x(1-x)(1+x) \, dx = \frac{1}{4}$  och  $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x)(1-x)^2 \, dx = \frac{5}{24}$ . Därför får vi  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{16})$ .

(c) Massan ges av  $m = \int_0^1 (1+x)(1-x) \, dx = \frac{2}{3}$ . Momentet runt  $x$ -axeln ges av  $M_{x=0} = \int_0^1 (1+x)x(1-x) \, dx = \frac{1}{4}$ , och  $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x)(1-x)^2 \, dx = \frac{5}{24}$ . Detta ger  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{16})$ .

(d) Vi har  $m = \int_0^1 (1-x)(1+x) \, dx = \frac{2}{3}$ ,  $M_{x=0} = \int_0^1 x(1-x)(1+x) \, dx = \frac{1}{4}$  och  $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x)(1-x)^2 \, dx = \frac{5}{24}$  vilket ger  $\bar{x} = \frac{3}{8}$  och  $\bar{y} = \frac{5}{16}$ .

**Ö7.3** (a) Arealen är 2 centroiden  $(2, 1)$  och dess minsta avstånd till  $y$ -axeln 2. Pappus sats ger  $V = 8\pi$ .

(b) Arealen är  $\pi$  och centroidens avstånd är 2. Volymen ges av  $V = 4\pi^2$ .

(c) Centroidens avstånd är  $4/3$  och triangelns area  $1/2$ . Volymen blir  $4\pi/3$ .

(d) Arealen blir  $4/3$ , centroidens avstånd till  $y$ -axeln 2 så volymen blir  $16\pi/3$ .

**P7.1** Vi väljer koordinatsystem där  $l$  är  $y$ -axeln. Vi antar att kurvan  $C$  kan beskrivas som en funktion  $f(x)$  där  $a \leq x \leq b$ . Om så inte är fallet delar vi upp  $C$  i bitar som var och en kan beskrivas med en funktion  $f(x)$ . Sedan beräknar vi areorna var för sig för delkurvorna och summerar. Vi har att det vinkelräta avståndet mellan tyngdpunkten för kurvan  $C$  och  $y$ -axeln ges av  $r = \bar{x}$ . Vi får då,

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = 2\pi M_{x=0} = 2\pi \bar{x} L = 2\pi r L,$$

där  $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{L}$  för ett endimensionellt objekt av längd  $L$ .



# Sakregister

def, 142  
elif, 142  
elseif, 142  
for, 141  
if, 142  
linspace, 142  
logspace, 142  
matplotlib, 141  
numpy, 141  
plot, 142  
polyfit, 143  
polyval, 143  
print, 143  
pylab, 141  
return, 142  
savefig, 143  
show, 141  
title, 143  
while, 141  
xlabel, 143  
ylabel, 143

algoritmer, 123  
analysens fundamentalsats, 16

bakåt Euler, 118  
Banachs fixpunktssats, 52  
båglängd, 33

C, 141  
C++, 141  
C#, 141  
centroid, 137  
cosinus, 107

derivata av integral, 17  
Diracs delta, 81

Eulers ekvation, 65, 116  
evalueringsymbol, 16  
existens och entydighet, 51, 102  
exponentialfunktionen, 105  
exponentiell skalning, 76

faltning, 79  
feluppskattning, 42

Fortran, 141  
fördröjning, 81

Guldins regel, 137

Haskell, 141  
Heavisides stegfunktion, 80  
homogenlösning, 61

impuls, 80  
inskjutning, 129  
integral, 10  
    generaliserad, 18  
    kontinuerliga funktioner, 11  
    numeriska metoder, 38  
    rationella funktioner, 30  
integrerande faktor, 57  
integrerbarhet, 10  
inverssubstitution, 28

Java, 141  
Julia, 141

konvergens, 42, 120  
konvergensordning, 43, 119

Laplacetransform, 74  
    väldefinierad, 74  
laplacetransform  
    derivata, 76  
    integral, 77  
    invers, 75  
    lösning av ode, 83  
    tabell, 83  
linjär algebra, 91  
linjärt ekvationssystem, 95  
längd, 92

massa, 135  
MATLAB, 141  
matris, 94  
medelvärdessatsen, 14  
medelvärdet, 15  
mittpunktsmetoden, 38, 118  
moment, 135  
norm, 51

obegränsad lösning, 54  
oberoende lösningar, 62  
ordinär differentialekvation, 50  
    andra ordningen, 59  
    första ordningen, 55  
    linjär, 61  
    separabel, 55  
ordinära differentialekvationer  
    global lösning, 103  
    högre ordningen, 99  
    numeriska metoder, 116  
    system, 96  
ordning, 50

partiell differentialekvation, 50  
partiell integration, 29  
partikulärlösning, 62  
partition, 7  
Picards sats, 52  
primitivfunktion, 15  
programmering, 141  
Python, 141

randvärdesproblem, 128  
rationella funktioner, 30  
Riemann-summa, 8  
rotationskropp, 36

Simpsons formel, 41  
sinus, 107  
skalning, 75  
skalärprodukt, 92  
stabilitet, 122  
stabilitetsområde, 122

trapetsmetoden, 38  
tyngdpunkt, 135

variabelsubstitution, 26  
vektor, 91  
volym, 35

