DUGGA

TMV151
Matematisk analys i en variabel M1, 20XX–XX–XX
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje rätt svar ger 1 bonuspoäng på tentan. ANGE ENDAST SVAR PÅ UPPGIFTERNA.

Namn:...**Antagningsår**..........................

Personnummer:..**Email**..

1. Givet $f(x) = x(1-x)$ och en partition av intervallet $[0,1]$ i 4 lika långa delintervall, bestäm den undre Riemannsumman.
Lösn. $I_{\min}(f,P) = \frac{1}{4}(f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(1)) = \frac{3}{32}$.

2. Bestäm integralen $\int_1^2 x\ln(x)\,dx$.
Lösn. Partiell integration ger $\int_1^2 x\ln(x)\,dx = [\frac{x^2}{2}\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$.

3. Bestäm integralen $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.
Lösn. Låt $u(x) = 1 + x^2$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$, $du = 2xdx$. Vi får $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du = \frac{\ln(2)}{2}$.

4. Bestäm integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.
Lösn. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0}[2\sqrt{x}]_c^1 = 2$.

5. Använd trapetsregeln med tre lika långa delintervall för att approximera $\int_0^1 1 - x^2\,dx$.
Lösn. $T_3 = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9}) = \frac{35}{54}$.

6. Lös differentialekvationen $u'(x) = x^2u^3$, $u(0) = 1$.
Lösn. Variabelseparation $-\frac{1}{2u^2} = \int \frac{du}{u^3} = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$. Begynnelsevillkoret ger $C = -\frac{1}{2}$. Vi får $u^2 = (1 - \frac{2}{3}x^3)^{-1}$ och därför $u(x) = (1 - \frac{2}{3}x^3)^{-1/2}$.

7. Lös differentialekvationen $u''(x) - 5u'(x) + 6u = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.
Lösn. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 5r + 6 = 0$ har lösningarna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$. Lösningarna blir då $u(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, konstanterna ges av $C_1 + C_2 = 0$ och $2C_1 + 3C_2 = 1$ ger $C_2 = 1$ och $C_1 = -1$ alltså $u(x) = e^{3x} - e^{2x}$.

/axel