F01

TMV151

Matematisk analys i en variabel

Föreläsare: Axel Målqvist
axel@chalmers.se

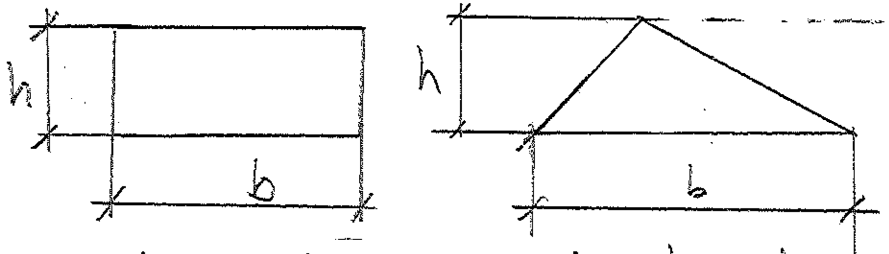
Innehåll: Lösa $u' = f \Rightarrow u = \int f\,dx$

$u' = f(u)$ Differentialekvation

* Praktisk info. Google tmv151 18/19
  - 3 föreläsningar
  - 2-3 övningar (inkl. 4 labbar)
  - 1 dugga i lv4
  - 1 tenta
* Kurslitteratur: Blå boken Larsson-Logg-M. Matematisk analys och linjär algebra II
* Idag: Kap 1.1-1.2 Area & Riemannsummor

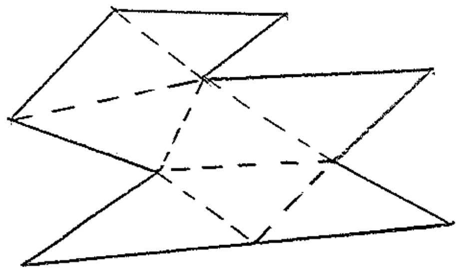
1.1 Area som gränsvärde av summor

Arean av en rektangel och triangel ges av



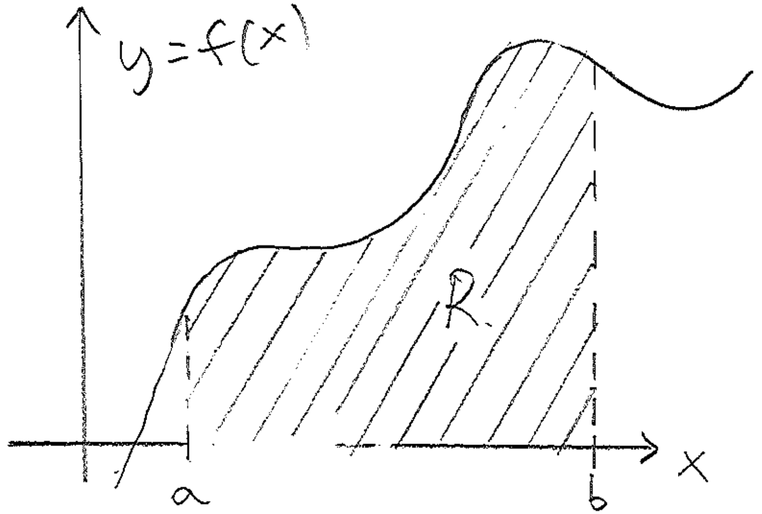
$A = b \cdot h$ $\qquad$ $A = \frac{1}{2} b \cdot h$

Varje område som kan begränsas av linjesegment (polygonområde) kan delas in i icke överlappande trianglar vars area kan bestämmas



Vi kan alltså bestämma arean av polygonområden.

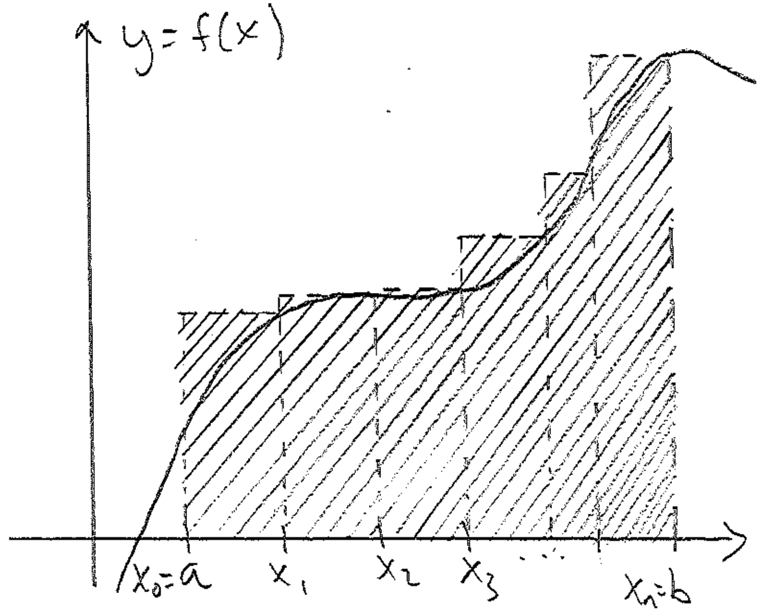
Låt R vara ett område i planet mellan en funktion f och x-axeln mellan $x=a$ och $x=b$.



Vi delar in intervallet $[a,b]$ i n delintervall $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$

Indelningen $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ kallas en partition av $[a,b]$. Vi låter $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ vara delintervallens längd, $i=1,\ldots,n$.

Vi skapar nu en approximation till arean av R med hjälp av rektanglar med bredd Δx_i och höjd $f(x_i)$



Den sammanlagda arean av rektanglarna ges av $S_n = f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_n)\Delta x_n =$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Om f är växande $S_n >$ arean av R
f är avtagande $S_n <$ arean av R

Genom att göra en finare indelning minskar avvikelsen (felet) mellan S_n och arean av R.

Om vi låter $\Delta x := \max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$ då $n\to\infty$

gäller Arean av $R = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} S_n$

under vissa antaganden på f som vi återkommer till.

Ofta låter vi delintervallen ha samma längd $\Delta x = \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a)$

För att kunna ge exempel på areabestämning som gränsvärde av summor behöver vi följande relationer:

(i) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bevis: Trick

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\dots+n \\ +\ n+(n-1)+\dots+1 \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n \text{ stycken}} \end{array}$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n\cdot(n+1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bevis: Problem 1.1

Avancerat trick:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Vi summerar uttrycket från $k = 1, \dots, n$

$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$$
$$4^3 - 3^3 = 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1$$
$$\vdots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$
$$+\ (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

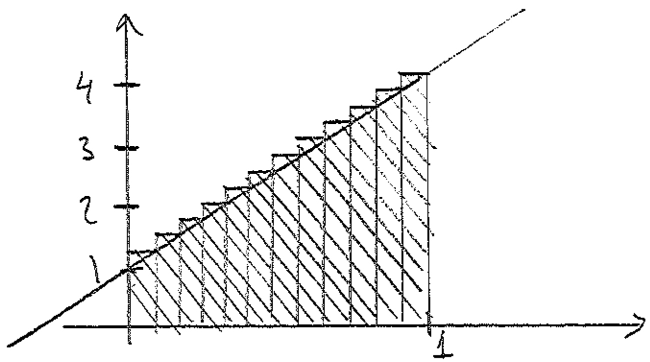
$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n$$
$$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n}{3} =$$
$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n}{3} =$$
$$= \frac{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{3} = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exempel (Areabestämningar)

Låt $f(x) = 3x + 1$ bestäm arean under kurvan mellan $x = 0$ och $x = 1$.

Låt $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$, $\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{n}$.

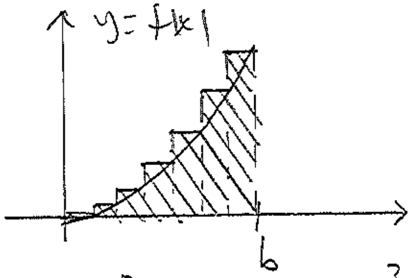


$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(3\frac{i}{n}+1\right)\frac{1}{n} =$$

$$= 1 + \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{3}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{3}{2n} \Rightarrow \text{Arean av } R = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{2}.$$

<u>Ex</u>: Låt $f(x) = x^2$. Bestäm arean mellan $x=0$ och $x=b$.



Låt $x_i = b\cdot\frac{i}{n}$,

$\Delta x_i = \frac{b}{n}$

$$S_n = \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(b\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2} \Rightarrow$$

$$\text{Arean av } R = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^3}{3}.$$

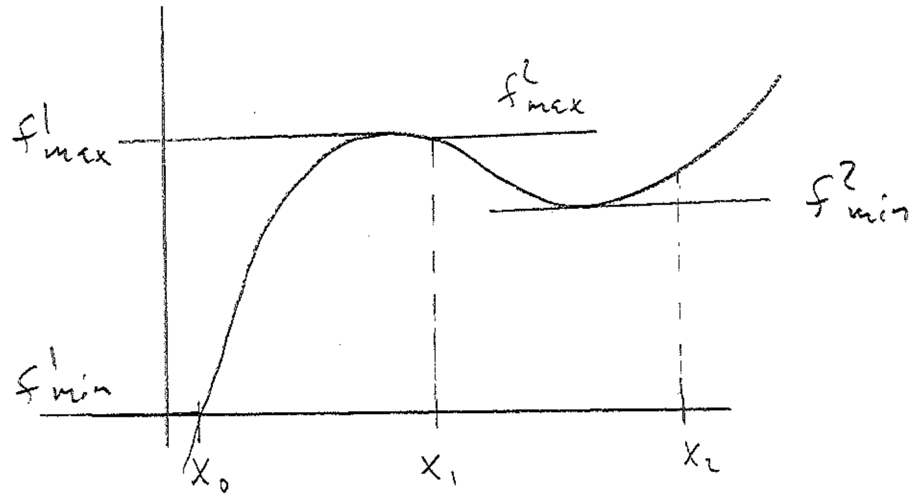
1.2 Riemann-summor

Låt $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ vara en partition av $[a,b]$ i n delintervall $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,\ldots,n$

$$\Delta x = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$$

Låt f vara begränsad på $[a,b]$.

På varje delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ är f^i_{min} största undre begränsning och f^i_{max} minsta övre begränsning till mängden $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$



Definition 1.2 Undre och övre Riemann-summa

Givet en begränsad funktion f på $[a,b]$ och en partition P av $[a,b]$ ges den undre Riemann-summan av

$$I_{min}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_{min}^{i} \Delta x_i$$

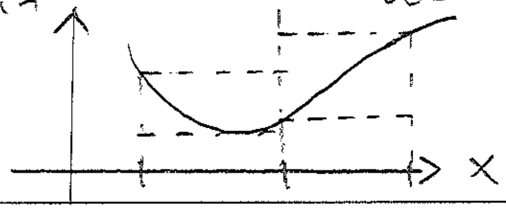
och den övre av

$$I_{max}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_{max}^{i} \Delta x_i$$

Vi noterar

(i) $I_{min}(f,P) \leq I_{max}(f,P)$

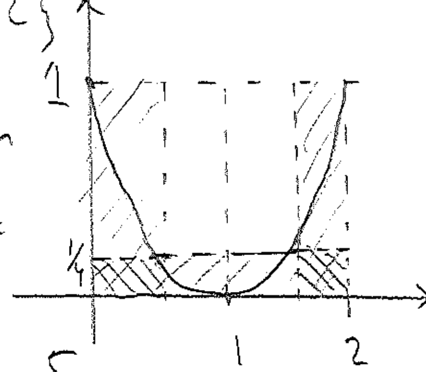
(ii) Om vi lägger till punkter i P ökar I_{min} medan I_{max} minskar



(iii) Både I_{min} och I_{max} konvergerar då $n \to \infty$. Om de går mot samma värde är det arean (med tecken) under kurvan f.

Exempel Låt $f(x) = (x-1)^2$ på $[0,2]$ och $P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

Bestäm I_{max} och I_{min}



$$I_{max}(f,P) = \sum_{i=1}^{4} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Delta x_i =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{4}$$

$$I_{min}(f,P) = \sum_{i=1}^{4} \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Delta x_i =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 0 + 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$