F02

* Integralen
* Integralens egenskaper
* Medelvärdessatsen

Kap 1.3 - 1.4

1.3 Definition av integralen

Definition 1.3

Låt f vara begränsad på $[a,b]$.
Om det finns ett unikt tal $I \in \mathbb{R}$ sådant att $I_{min}(f,P) \le I \le I_{max}(f,P)$ för alla partitioner P av $[a,b]$ (där I_{min}, I_{max} är undre och övre Riemann-summa) säger vi att f är integrerbar på $[a,b]$ och

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

differential

integrand

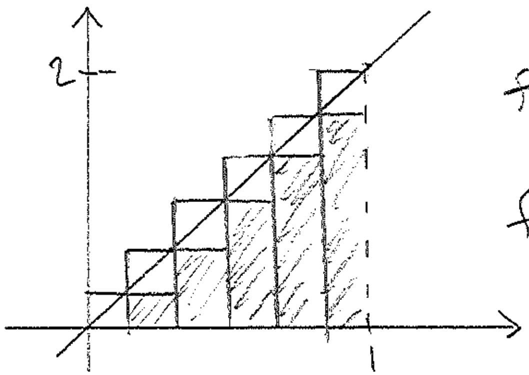
integrationsgränser

Sats 1.1 En begränsad funktion f är integrerbar om för varje $\varepsilon > 0$ finns P s.a $I_{max}(f,P) - I_{min}(f,P) < \varepsilon$

Definitionen kan vara svår använd men Sats 1.1 är användbar.

Exempel: Visa att $f(x) = 2x$ är integrerbar på $[0,1]$.

Låt $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$



$f_{min}^{i} = f(x_{i-1}) = 2\frac{i-1}{n}$

$f_{max}^{i} = f(x_i) = \frac{2i}{n}$

$$I_{min}(f, P_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 2(i-1) = \frac{2}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$I_{max}(f, P_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 2i = 1 + \frac{1}{n}$$

Givet $\varepsilon > 0$ finns $n > \frac{2}{\varepsilon}$ s.a

$$I_{max}(f, P_n) - I_{min}(f, P_n) = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

$\therefore$ f är integrerbar och $\int_0^1 2x\,dx = 1$.

Sats 1.2 Kontinuerliga funktioner är integrerbara

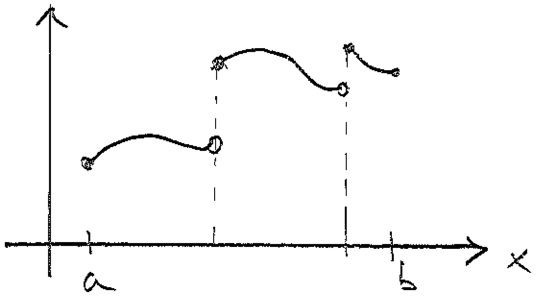
Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$. Då är f integrerbar på $[a,b]$ och alla Riemann-summor $I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, $c \in [x_{i-1}, x_i]$ konvergerar

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{då } \begin{matrix} n \to \infty \\ \Delta x \to 0 \end{matrix}.$$

Beviset bygger på att $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ då $|x-y| < \delta$ för f kontinuerlig på slutet intervall. Genom att välja punkter $x_0, x_1, \dots, x_n$ s.a $x_j - x_{j-1} < \delta$ gäller $\Delta x < \delta$ och

$$I_{max}(f,P) - I_{min}(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \varepsilon \quad \forall \varepsilon.$$

Resultatet kan utvidgas till styckvis kontinuerliga funktioner



Sats 1.1 kan även användas för att visa integralens egenskaper.

<u>Sats 1.3</u> Låt f, g vara integrerbara på $[a, b]$.

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b Af(x) + Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$, $f(x) \leq g(x)$

(v) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(vi) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ om f udda, $f(-x) = -f(x)$

(vii) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ om f jämn $f(-x) = f(x)$

(viii) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Bevis: (ii) kan ses som definition.

(i) följer av (ii) med $b = a$.

(iv) kan visas genom motsägelsebevis

Låt $I = \int_a^b f(x)\,dx$, $J = \int_a^b g(x)\,dx$.

Antag $I > J$ eller $I - J = \delta > 0$

Då finns partition P s.a

$$I_{min}(f,P) > I - \varepsilon \overset{(\varepsilon<\delta)}{>} I - \delta = J \geq I_{min}(g,P)$$

vilket är motsägelse ty $I_{min}(f,P) \leq I_{min}(g,P)$ för alla P då $f \leq g$.

(v) följer av (iv) eftersom $\pm f(x) \leq |f(x)|$

För resten se boken eller övningar.

<u>Exempel</u> Bestäm integralen

$$\int_{-2}^{2} 7x^3 + 4\,dx = 7\int_{-2}^{2} x^3\,dx + 4\int_{-2}^{2} 1\,dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^3 \text{ är udda ty } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \\ \qquad = -f(x) \end{array} \right\}$$

$$= 7 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 16$$

kvadrat med sidan 4.

1.4 Medelvärdessatsen

Derivatans medelvärdessats sa att $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ för något $c \in [a,b]$.

Ett liknande resultat gäller för integralen.

Sats 1.4 Medelvärdessatsen

Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$. Då finns en punkt $c \in [a,b]$ sådan att $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

<u>Bevis:</u> Eftersom f är kontinuerlig antar f både max M och min m på intervallet $[a,b]$.

Vi bildar nu tvåpunkts partitionen

$P = \{a, b\}$. Då gäller

$$m(b-a) \leq I_{min}(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq I_{max}(f,P) \leq M(b-a)$$

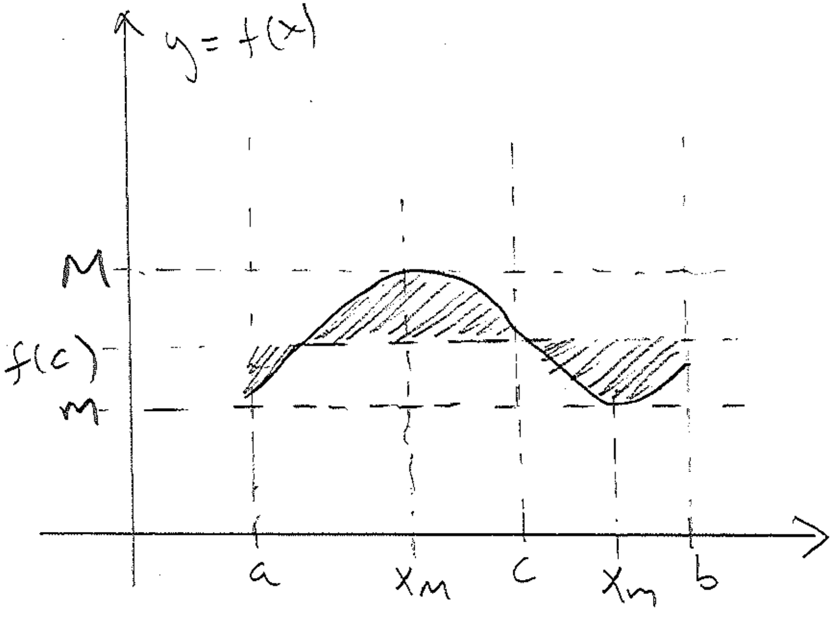
eller

$$f(x_m) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M = f(x_M)$$

där x_m är den punkt min antas i och x_M den punkt max antas i.

Eftersom f är kontinuerlig antas alla mellanliggande värden $[f(x_m), f(x_M)]$. För något $c \in [a,b]$ gäller då

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Ytorna över och under linjen $f(c)$ är lika stora.

<u>Definition 1.4 Medelvärdet av en funktion</u>

Medelvärdet $\bar{f}$ av en integrerbar funktion f på intervallet $[a,b]$ definieras av

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Exempel

Bestäm medelvärdet av

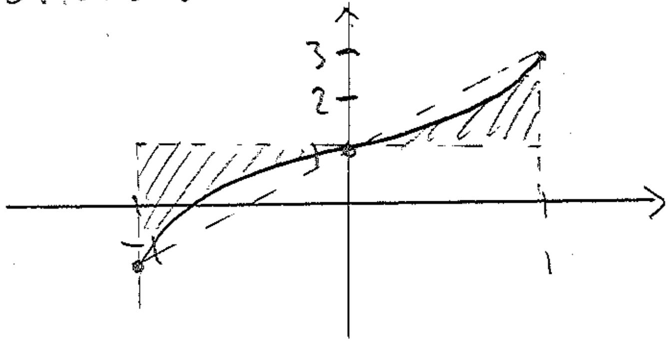
$f(x) = x^3 + x + 1$ på $[-1, 1]$

$$\bar{f} = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} x^3 + x + 1 \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^3 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 \, dx$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (-x)^3 = -(x)^3 \text{ udda} \\ (-x) = -(x) \text{ udda} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 1$$

funktionens medelvärde är 1



Exempel Ej integrerbar funktion

Låt $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Vi tittar på intervallet $[0, 1]$.

För varje P har vi

$I_{min}(f, P) = 0$ eftersom varje intervall innehåller rationella tal.

Samtidigt gäller $I_{max}(f, P) = 1$ eftersom samtliga intervall även innehåller irrationella tal.

Därför finns flera I sådana att

$$0 = I_{min}(f, P) \leq I \leq I_{max}(f, P) = 1$$

och f är inte (Riemann) integrerbar.