# F03

* Analysens fundamentalsats
* Primitiv funktioner
* Generaliserade integraler

Kap 1.5 - 1.6

## 1.5 Analysens fundamentalsats

Definition 1.5 Primitiv funktion

En funktion $F(x)$ kalles primitivfunktion till en funktion $f(x)$ på intervallet $I$ om $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

Sats 1.5 Analysens fundamentalsats

Låt $f$ vara kontinuerlig på ett intervall $I$ innehållande punkten $a \in I$. Låt vidare $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Då är $F(x)$ primitivfunktion till $f(x)$ det vill säga $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

Om $G(x)$ är godtycklig primitiv funktion till $f(x)$ på $I$ gäller $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$, $b \in I$.

Axel Målqvist axel@chalmers.se

Bevis:

Vi använder derivatans definition

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left( \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{medelvärdes-} \\ \text{satsen ger} \\ \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c)\cdot h,\ c\in[x,x+h] \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to c} f(c) = f(x)$$ eftersom $f$ är kontinuerlig.

Om $G'(x) = f(x)$ gäller $\frac{d}{dx} F(x) - G(x) = 0$ vilket innebär att $F(x) - G(x) = C$ konstant. Så $G(x) = F(x) - C = \int_a^x f(t)\,dt - C$

Vi sätter in $x=a$ $G(a) = -C$

Sedan låter vi $x=b$ och får

$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + G(a)$ eller

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

Vi noterar:

- Primitivfunktionen är ej unik, är $F(x)$ primitiv till $f(x)$ är även $F(x) + C$ primitiv.
- Om vi känner primitivfunktionen är integralen enkel att bestämma.
- Integralen kan ses som derivatans invers eftersom

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Vi kommer använda två beteckningar för primitivfunktionen till $f(x)$. Antingen $F(x)$ eller $\int f(x)dx$ alltså integral utan gränser. Vi inför även en evalueringssymbol,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Deriveringsreglerna ger oss en stor mängd primitivfunktioner som är bra att känna.

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $x^r$ | $\frac{x^{r+1}}{r+1}+C,\ r\neq -1$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $\sin(ax)$ | $-\frac{1}{a}\cos(ax)+C$ |
| $\cos(ax)$ | $\frac{1}{a}\sin(ax)+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C,\ a>0$ |
| $\frac{1}{a^2+x^2}$ | $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C\ a\neq 0$ |
| $e^{ax}$ | $\frac{e^{ax}}{a}+C,\ a\neq 0$ |
| $b^{ax}$ | $\frac{b^{ax}}{a\ln b}+C,\ a\neq 0,\ b>1$ |

<u>Exempel</u> Bestäm primitivfunktionen till

$$f(x) = x^3 - \cos 2x$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\sin 2x + \underline{\underline{C}}$$

Notera att Primitivfunktionen är ej bestämd upp till en konstant!

Sats 1.7 Derivata av integral

Låt $f$ vara integrerbar och $g$ och $h$ kontinuerligt deriverbara på $\mathbb{R}$.

Då gäller
$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

Bevis: Vi har
$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x)$$
m.h.j.a. kedjeregeln. Dessutom
$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{0} f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{0}^{h(x)} f(t)\,dt = -f(h(x))h'(x)$$

Tillsammans får vi
$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_{0}^{g(x)} f(t)\,dt - \frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{0} f(t)\,dt$$
$$= f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x) \quad \blacksquare$$

Exempel Bestäm $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^t\,dt$.

Vi får $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^t\,dt = e^{x^2}\cdot 2x$.

1.6 Generaliserade integraler

Vi studerar $\int_a^b f(x)\,dx$ där

(i) $a=-\infty$ och eller $b=\infty$

(ii) $f$ är obegränsad på $[a,b]$.

Definition 1.7 Generaliserad integral

En integral kallas generaliserad om (i) och eller (ii) ovan är uppfyllt.

Fall (i) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{b} f(x)\,dx$

Fall (ii) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to a^+} \int_y^b f(x)dx$
f kont på (a,b]

och motsvarande i övregränsen.

Integralerna är nu väldefinierade och om de konvergerar i gräns mot ett ändligt värde är de konvergenta annars divergenta.

Exempel (konvergent integral)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^3}dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^R$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exempel (divergent integral)

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{y\to 0^+}\left[\ln|x|\right]_y^1 = \infty$$

Sats 1.8 (p-integraler)

Låt $0<a<\infty$. Då gäller

(i) $\int_a^\infty x^{-p}dx = \begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \\ \text{divergerar till } \infty, & p\le 1 \end{cases}$

(ii) $\int_0^a x^{-p}dx = \begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p<1 \\ \text{divergerar till } \infty, & p\ge 1 \end{cases}$

Bevis:

(i) $p>1$ $\lim_{R\to\infty}\int_a^R x^{-p}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^R = \frac{a^{1-p}}{p-1}$

$p=1$ $\lim_{R\to\infty}\int_a^R x^{-1}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\ln x\right]_a^R = \infty$

$p<1$ $\lim_{R\to\infty}\int_a^R x^{-p}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^R = \infty$

(ii) $p<1$ $\lim_{y\to 0^+}\int_y^a x^{-p}dx = \lim_{y\to 0^+}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_y^a = \frac{a^{1-p}}{1-p}$

$p=1$ $\lim_{y\to 0^+}\int_y^a x^{-1}dx = \lim_{y\to 0^+}\left[\ln x\right]_y^a = \infty$

$p>1$ $\lim_{y\to 0^+}\int_y^a x^{-p}dx = \lim_{y\to 0^+}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_y^a = \infty$ ∎

## Sats 1.9 Begränsning av integraler

Låt $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f, g$ kontinuerliga på $(a, b)$ sådana att $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Om $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerar så gör även $\int_a^b f(x)\,dx$ det och $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Om $\int_a^b f(x)\,dx$ divergerar gör även $\int_a^b g(x)\,dx$ det.

Bevis: Bygger på motsvarande bevis i fallet $-\infty < a \leq b < \infty$, se boken.

Exempel Visa att $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ är konvergent.

Vi har att $e^{-x^2} \leq \begin{cases} 1, & x<1 \\ e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \overset{(1.9)}{\leq} 1 + \int_1^\infty e^{-x}\,dx$$

$$= 1 + \lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{-x}\,dx = 1 + \lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^R =$$

$$= 1 + \frac{1}{e}.$$

## Sammanfattning kapitel 1

Viktiga Satser:

* Medelvärdessatsen 1.4
* Analysens fundamentalsats 1.5
* p-integraler 1.8

Andra viktiga punkter

* Riemann-summor
* Integralens definition, integrerbarhet
* Primitiv funktioner