$\boxed{\text{F04}}$

* Variabelsubstitution
* Partiell integration
* Integration av rationella funktioner

Kap. 2.1 - 2.2

2.1 Variabelsubstitution och partiell integration

Vi studerar tekniker för att hitta primitiv funktioner.

Kom ihåg I många fall är det svårt eller omöjligt att uttrycka primitiv funktionen i termer av kända (elementära) funktioner e^x, sin, cos ...

Sats 2.1 Variabelsubstitution

Låt g vara kontinuerligt deriverbar på $[a,b]$ med $g(a)=A$ och $g(b)=B$. Vidare låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$

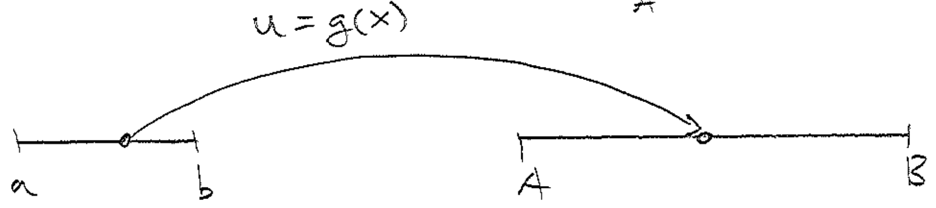
Då gäller
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$$

Bevis: Låt $F(u)$ vara primitivfunktion till $f(u)$ så $F'(u) = f(u)$ (f är kont. integrerbar). Då gäller $\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x)$. Vi får

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(B) - F(A) = \int_A^B f(u)\,du .$$

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ $\quad\quad$ $\int_A^B f(u)du$ ▨



Vi transformerar problemet m.h.j.a en ny variabel $u = g(x)$. För primitivfunktionen gäller på samma sätt

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Variabelsubstitution följer alltså av kedjeregeln för derivator.

Exempel (Variabelsubstitution)

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = g(x) = x^2+1, & f(u) = \frac{1}{2u} \\ g'(x) = 2x, & f(g(x))g'(x) = \frac{x}{x^2+1} \end{matrix} \right\}$$

$$= \int \frac{1}{2u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Exempel (Variabelsubstitution)

$$\int_0^8 \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \sqrt{x+1}, & u(8) = 3 \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}, & u(0) = 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= 2\int_1^3 \cos u\,du = 2\sin(3) - 2\sin(1) .$$

I variabelsubstitution låter vi $u = g(x)$. Man kan även låta $x = g(u)$. Detta kallas inverssubstitution.

Exempel: (Inverssubstitution)

Bestäm $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ med hjälp av inverssubstitution. Vi får

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} x = \cos t, & 1 = \cos 0 \\ dx = -\sin t\, dt, & 0 = \cos\frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\cdot \sin t\, dt = \left\{ \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \right\}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \\ \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t \end{array} \right\}$$

$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Vi har bestämt arean av en kvarts-cirkel med radie 1!

Sats 2.3 (Partiell integration)

Låt f, g vara kontinuerligt deriverbara på $[a,b]$. Då gäller

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Bevis: Produktregeln för derivator ger

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Vi integrerar över $[a,b]$

$$\int_a^b f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)\,dx$$

$$= \big[f(x)g(x)\big]_a^b \qquad \blacksquare$$

Partiell integration bygger alltså på produktregeln.

För primitivfunktionen gäller

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Partiell integration är användbar om $f'(x)g(x)$ är enklare att hitta primitiv till än $f(x)g'(x)$.

Exempel: (Partiell integration)

$$\int x e^x\,dx = \begin{Bmatrix} f(x)=x \\ g'(x)=e^x \end{Bmatrix} = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx$$

$$= (x-1)e^x.$$

Exempel: (Reduktionsformel)

$$F_n(x) = \int_0^x t^n e^t\,dt = x^n e^x - n\int_0^x x^{n-1}e^x\,dx =$$

$$= x^n e^x - n F_{n-1}(x). \quad F_0(x) = e^x - 1,\ F_1(x) = xe^x - e^x + 1$$

$$I_2(x) = x^2e^x - 2(x-1)e^x - 2$$

2.2 Integration av rationella funktioner

En rationell funktion kan skrivas

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ där } g, h \text{ är polynom.}$$

Om g har högre grad än h leder polynomdivision till

$$f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{h(x)}, \quad p, r, h \text{ polynom}$$

och $\text{grad}(r) < \text{grad}(h)$.

Exempel: polynomdivision

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x+3x^2+3-3}{x^2+1} =$$

$$= x + 3 - \frac{x+3}{x^2+1}.$$

Vi antar $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\text{grad}\,p < \text{grad}\,q$

p, q polynom.

Linjära nämnare:

$$\int \frac{b}{x+a}\,dx = \{u = x+a\} = b\int \frac{1}{u}\,du = b\ln|u| + C$$
$$= b\ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{b}{(x+a)^n}\,dx = \{u = x+a\} = b\int u^{-n}\,du = \frac{b}{1-n}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C$$

Kvadratiska nämnare:

Vi har att $x^2+ax+b = \{y = x+\frac{a}{2}\} =$
$= y^2 - \frac{a^2}{4} + b = y^2 \pm c^2$. Det räcker därför att studera fyra fall:

(i) $\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \{u = x^2+a^2, \frac{du}{dx} = 2x\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du =$
$= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$

(ii) $\int \frac{x}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C$

(iii) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(iv) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \left\{ \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}, \right.$

där $\frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$, $\forall x$,

$\left. \begin{array}{ll} \text{varför } x: A+B = 0, & B = -A \\ 1: Aa - Ba = 1, & A = \frac{1}{2a} \end{array} \right\} =$

$$= \int \frac{1/(2a)}{x-a}\,dx - \int \frac{1/(2a)}{x+a}\,dx = \frac{1}{2a}\ln|x-a|$$
$$- \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

I fallet (iv) använder vi partialbråksuppdelning.

Alla rationella funktioner kan skrivas som summan av uttryck med linjära och kvadratiska nämnare (upphöjt till n)

Det kommer av att polynom kan faktoriseras

Om $q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_m)$ kan
distinkta
tillexempel kan

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m} \text{ där}$$

A_i beror på $p(x)$. Om rötterna a_i är multipla ansätts $\frac{A_1}{x-a_i} + \frac{A_2}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-a_i)^r}$ om multipliciteten är r.

Exempel: Rationella funktioner

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \left\{ \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2} \right.$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow A_1(x-1)^2 + A_2x(x-1) + A_3x = 1 \\ &x^2:\ A_1 + A_2 = 0 \qquad 1:\ A_1 = 1 \\ &x:\ -2A_1 - A_2 + A_3 = 0 \qquad \Rightarrow A_2 = -1 \quad \Rightarrow A_3 = 1 \end{aligned}\right\} =$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C .$$

Generellt gäller följande ansatser:

Faktorer i $q(x)$	ger partialbråk
$x+a$	$\frac{A_1}{x+a}$
$(x+a)^n$	$\frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x+a)^n}$
x^2+ax+b	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}$
$(x^2+ax+b)^n$	$\frac{A_1+B_1x}{x^2+ax+b} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b)^n}$

Genom partialbråksuppdelning får vi tillbaka fallen med linjära och kvadratiska nämnare!