F06

* Numeriska metoder för att beräkna integraler

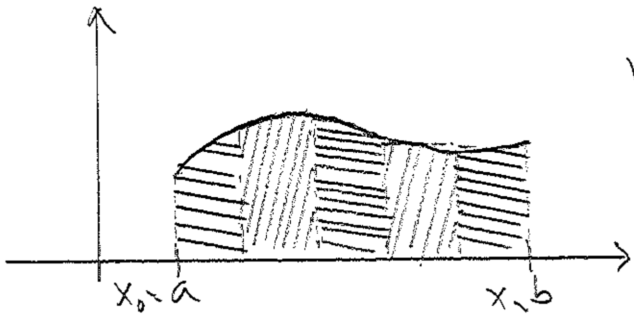
* Konvergens

Kap 2.5 - 2.6

2.5 Numeriska metoder

Vi studerar $I = \int_a^b f(x)\,dx$, där $-\infty < a \leq b < \infty$ och f är kontinuerlig eller styckvis kontinuerlig.

Notera: I många fall är det svårt eller omöjligt att bestämma primitiv funktion $F(x)$ med analytiska tekniker. Då används numerisk integration eller kvadratur som det också kallas.



Vi delar upp intervallet i n delintervall.

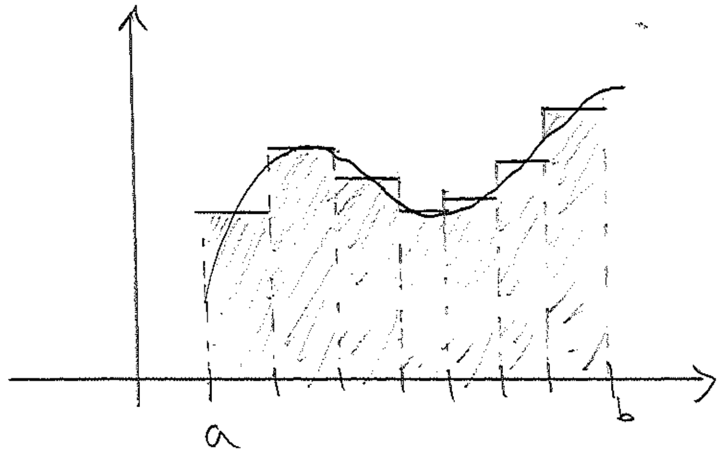
Låt $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ och

låt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$

Definition 2.1: (Mittpunktsmetoden)

Mittpunktsmetoden approximerar integralen på varje delintervall med värdet i mittpunkten gånger Δx_i

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x_i$$



Ibland antar vi att $\Delta x_i = h$ $i = 1, \dots, n$.

Då får vi $x_i = a + ih$ och mittpunkts-metoden ger $\int_a^b f(x) \approx \underline{\underline{M_n}} = \sum_{i=1}^{n} f(a + (i - \frac{1}{2})h)\, h$

Där M_n används som förkortning.

Exempel: $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, beräkna M_4

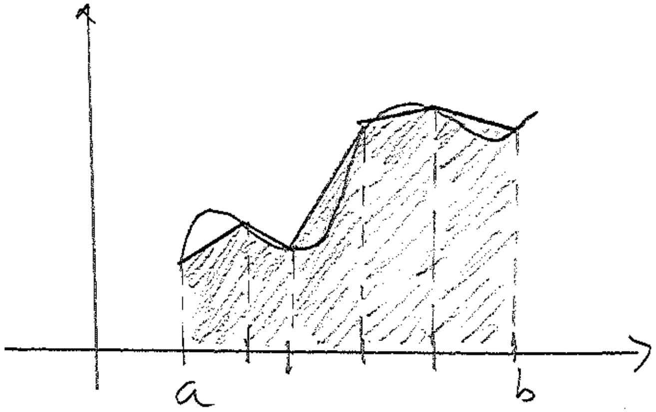
$$M_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9/8} + \frac{1}{11/8} + \frac{1}{13/8} + \frac{1}{15/8}\right) = 0{,}69255055$$

Notera att $I = \ln 2 = 0{,}69314718\dots$

Definition 2.2 (Trapetsmetoden)

Trapetsmetoden approximerar istället med trapetser (linjesegment mellan $f(x_{i-1})$ och $f(x_i)$ bildar fyrhörningar, trapetser).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x_i$$



Om $\Delta x_i = h$ skriver vi $T_n \approx \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Exempel</u>: $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, beräkna $T_4, T_8, \ldots$ ($\frac{1}{x}$ är $f(x)$)

$$T_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(f(1) + f(\tfrac{5}{4}) + f(\tfrac{5}{4}) + f(\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{7}{4}) + f(\tfrac{7}{4}) + f(2)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{8}{5} + \frac{4}{3} + \frac{8}{7} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}69702381\ldots \qquad \ln 2 = 0{,}69314718\ldots$$

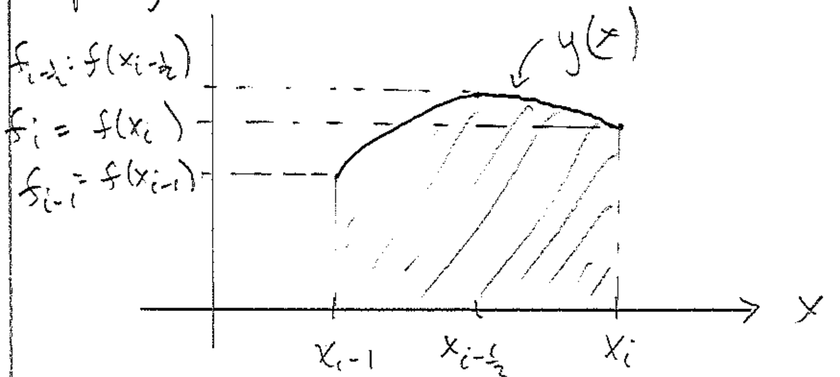
$$T_8 = 0{,}69412185\ldots$$

$$T_{16} = 0{,}69339120\ldots$$

felet minskar

<u>Simpsons formel</u>

Slutligen approximation av andragrads-polynom.



Vi vill uttrycka integralen i termer av f_{i-1}, $f_{i-\frac{1}{2}}$, f_i

Låt $y(x) = A(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 + B(x - x_{i-\frac{1}{2}}) + C$ vara ett godtyckligt andragrads polynom.

Vi förskjuter med $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ för att förenkla bestämning av A, B, C.

Låt $h = \Delta x_i$.

$$f_i = A\left(x_i - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 + B\left(x_i - x_{i-\frac{1}{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{h^2}{4}A + \frac{h}{2}B + C$$

$$f_{i-\frac{1}{2}} = \ldots = C$$

$$f_{i-1} = \frac{h^2}{4}A - \frac{h}{2}B + C$$

Vi får att $f_i + f_{i-1} = \frac{h^2}{2}A + 2C = \frac{h^2}{2}A + 2f(x_{i-\frac{1}{2}})$

och $f_i - f_{i-1} = hB \Rightarrow B = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \frac{f_i - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}}{h^2}$$

Vi integrerar $y(x)$.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x - x_{i-\frac{1}{2}} \\ \frac{dt}{dx} = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} At^2 + Bt + C\,dt = \left[A\frac{t^3}{3} + B\frac{t^2}{2} + Ct\right]_{-h/2}^{h/2} =$$

$$= Ah^3 \cdot \frac{1}{12} + 0 + Ch =$$

$$= \frac{f_{i-1} - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_i}{6} \cdot h + f_{i-\frac{1}{2}}h =$$

$$= \frac{f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i}{6} \cdot h$$

Definition 2.3 (Simpsons formel)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)}{6}\Delta x_i$$

Exempel $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. Beräkna S_2 alltså Simpsons formel med $n = 2$ och $\Delta x_i = h = \frac{1}{2}$.

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f(1) + 4f(\frac{5}{4}) + f(\frac{3}{2})}{6} + \frac{f(\frac{3}{2}) + 4f(\frac{7}{4}) + f(2)}{6} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{16}{5}+\frac{2}{3}}{6}+\frac{\frac{2}{3}+\frac{16}{7}+\frac{1}{2}}{6}\right) = 0{,}69325397\ldots$$

Klart bäst av de tre.

2.6 Konvergens

Metoderna är approximativa och ger därför ett svar som avviker från I. Felet beror på n enligt följande.

Sats 2.8 (feluppskattning.)

Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$ med $\max_{a\le x\le b} |f''(x)| \le K$. Vi delar in $[a,b]$ i n lika stora delintervall. Då gäller

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\right| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Om $\max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)| \le K$ gäller

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \le \frac{K(b-a)^5}{2880n^4}$$

Bevis: Endast mittpunktsmetoden, för trapets se Problem 2.9.

Vi studerar ett intervall $[x_{i-1}, x_i]$ och låter $h = x_i - x_{i-1}$.

Taylors formel ger för $\bar{x}, \xi \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\bar{x})^2$$

Låt $\bar{x} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ och använd $|f''(\xi)| \le K$

$$|f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x-\bar{x})| \le \frac{K}{2}(x-\bar{x})^2$$

för alla $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Vi får

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(\bar{x})h\right| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)-f(\bar{x})\,dx\right| =$$

$$= \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} x-\bar{x}\,dx = 0 \right\} = \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})(x-\bar{x})\,dx\right|$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| f(x)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})(x-\bar{x})\right| dx \leq$$

$$\leq \frac{K}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-\bar{x})^2\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = x-\bar{x} \\ dy = dx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{K}{2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2\,dy = \frac{Kh^3}{24}.$$

Vi summerar över $i=1,\dots,n$ och använder $h = \frac{b-a}{n}$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\,dx - f(\bar{x})h\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{Kh^3}{24} = \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

För trapets och mittpunkt gäller felet $\sim O(\frac{1}{n^2})$ medan Simpson ger felet $\sim O(\frac{1}{n^4})$.

* <u>Sammanfattning kapitel 2</u>

Viktiga satser

2.4 Båglängd

2.5 Volym som integral av area

Övriga viktiga moment

- Variabelsubstitution
- Partiell integration
- Rotationskroppar
- Numeriska metoder och konvergens.