$\boxed{\text{F07}}$

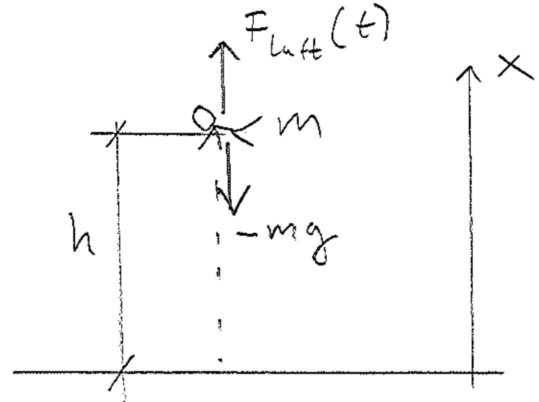
* Introduktion till differentialekvationer

* Existens och entydighet av lösning

Kap 3.1 – 3.2

3.1 Introduktion

Motiverande exempel (fritt fall)



Newtons andra lag ger

$$m \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{acceleration}}}{a} = m \cdot \frac{d}{dt} \underset{\text{hastighet}}{v(t)} = F_{luft} - mg$$

Hastigheten v är riktad i negativ riktning $v \leq 0$. Vi antar att luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten $F_{luft} = -kv \geq 0$ då $k > 0$ är proportionalitets-konstant

Hastigheten $v(t)$ löser då följande differentialekvation

$$m \frac{d}{dt} v(t) = -mg - kv(t), \quad v(0) = 0$$

↑ begynnelsevillkor.

Lösningen $v(t)$ är alltså en funktion av tiden. Både $v(t)$ och dess derivata $v'(t)$ ingår.

Vill vi bestämma höjden som funktion av tiden ges den som lösning till $\frac{d}{dt} x(t) = v(t)$, $x(0) = h$ med lösning

$$x(t) = h + \int_0^t v(\tau)\, d\tau .$$

<u>Definition 3.1</u> Ordinär differentialekv. (ODE)

En differentialekvation (DE) som bara innehåller derivator med avseende på <u>en</u> oberoende variabel.

<u>Definition 3.2</u> Partiell differentialekvation (PDE)

En DE som innehåller derivator m.a.p flera oberoende variabler.

<u>Exempel</u> PDE

Låt $u(x,t)$ beskriva förskjutning i x-led i en endimensionell stav. Vi studerar vågekvationen

$$\frac{d^2}{dt^2} u(x,t) = c^2 \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} .$$

PDE studerar vi i flervariabelanalys.

Definition 3.3 (ordning)

En DE där högsta förekommande derivata är en n:te derivata sägs vara av n:te ordningen.

I fritt fall är ordningen 1 och i vågekvationen 2.

3.2 Existens och entydighet

Vi studerar första ordningens ODE på formen

$$(*) \begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x > x_0 \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

(I fritt fall var $u(x)$ istället $v(t)$ och $f(x, u)$ var $f(v) = -g - \frac{k}{m} v$ $v(0) = 0$.)

Vi vill avgöra om det finns lösning genom fixpunktsiteration av funktioner. (Banach)

Sats 3.2 Picards sats

Antag att $f(x, u)$ är definierad på en rektangel av formen $R = \{(x, u) : a \le x \le b,\ c \le u \le d\}$ innehållande punkten $(x_0, u_0) \in R$. och att $f(x, u)$ är ~~Lipschitz~~ Lipschitz kontinuerlig i R dvs

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \le L|u_1 - u_2|$$

$(x, u_1), (x, u_2) \in R$.

Då finns $\delta > 0$ så att $(*)$ har unik lösning $u(x)$ för $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Bevis: (skiss)

Bygger på fixpunktsiterationen av den integrerade ekvationen

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$$

där vi låter $\phi_0 = u_0$ och

$$\phi_n(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{n-1}(t))\,dt$$

Genom att visa att $\phi_{n+1} = G(\phi_n)$ har en fixpunkt gäller $\lim_{n\to\infty} \phi_n = u$ och $u(x) = G(u) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$

eller $u'(x) = f(x, u(x))$, $u(0) = u_0$

För fullständigt bevis se bl.a. boken.

Exempel (Picarditeration)

Bestäm lösningen till $u'(x) = f(x, u(x)) = -3u(x)$, $u(0) = 1$ med hjälp av iteration.

Vi integrerar

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt = 1 - 3\int_0^x u(t)\,dt =: G(u)$$

Vi löser ekvationen med fixpunktsiteration. Låt $\phi_0 = 1$ och

$$\phi_n(x) = 1 - 3\int_0^x \phi_{n-1}(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Vi får $\phi_1(x) = 1 - 3\int_0^x 1\,dt = 1 - 3x$

$$\phi_2(x) = 1 - 3\int_0^x 1 - 3t\,dt = 1 - 3\left(x - \frac{3}{2}x^2\right)$$

$$\phi_3(x) = 1 - 3\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{6}x^3\right) =$$

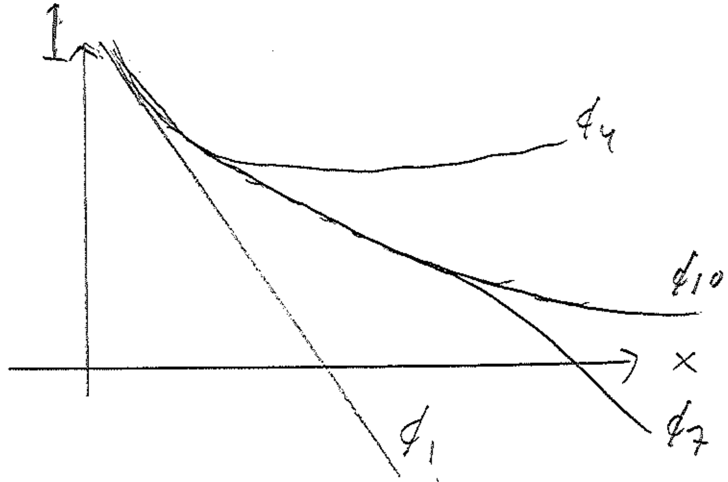
$$= 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{6}x^3$$

och i allmänna fallet

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-3x)^i}{i!}$$

För alla $x \in [0,1]$ är detta Taylorutvecklingen av $\phi(x) = e^{-3x}$ runt $x = 0$ (Maclaurin).

Eftersom ϕ är deriverbar gäller $\phi'(x) = -3\phi(x)$, $\phi(0) = 1$ alltså $u(x) = \phi(x)$.



Funktionerna konvergerar i meningen $x \in [0,1]$ att $\max_{0 \le x \le 1} |\phi(x) - \phi_n(x)| \to 0$ då $n \to \infty$. Man kan skriva med normbeteckningen $\max_{0 \le x \le 1} |\phi(x) - \phi_n(x)| =$

$$= \|\phi - \phi_n\| \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Existensen av gränsfunktion ϕ beror på att Cauchy-följder av funktioner i $C([a,b])$ alltså kontinuerliga funktioner definierade på $[a,b]$

konvergerar i $C([a,b])$,

Banachs fixpunktsats för funktioner, Sats 3.1 i boken.

<u>Exempel</u> (Obegränsad lösning)

Ekvationen $\frac{du}{dx} = u^2$, $u(0)=1$

har lösningen $u(x) = \frac{1}{1-x}$ eftersom

$u'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ och $u(0)=1$.

Trots att Picards sats är uppfylld t.ex. på

$R = \{(x,u) : -5 \le x \le 5, 0 \le u \le 2\}$ godtyckligt

eftersom $|u_1^2 - u_2^2| = |u_1 - u_2| \cdot |u_1 + u_2|$
$\le 2|u_1 - u_2|$

existerar bara lösning för $0 \le x < 1$.

Vi återkommer i kap 5 med starkare villkor på f som ger lösning för alla $x \in \mathbb{R}$.

<u>Exempel</u>: (Ej unik lösning)

$\frac{du}{dx} = 3u^{2/3}$, $u(0)=0$.

har lösningar $u(x)=0$ och $u(x)=x^3$

eftersom $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 = 3(x^3)^{2/3}$, $0^3 = 0$.

Picard håller inte eftersom

$f(x,u) = 3u^{2/3}$ ej är Lipschitz

kontinuerlig i $u=0$.

$f_u'(u) = \frac{2}{3}u^{-1/3} \to \infty$ $u \to 0$.