F08

* Första ordningens ODE

* Andra ordningens ODE

Kap 3.3-3.4

3.3 Första ordningens ODE

Vi vet förutsättningarna för existens och entydighet av lösning. Nu studerar vi lösningstekniker

Sats 3.3 (Separabel ODE)

Låt $f(x)$ och $g(u)$ vara kontinuerliga med primitiv funktioner $F(x)$ och $G(u)$.
Låt $u(x)$ lösa $g(u)\frac{d}{dx}u(x) = f(x)$.

Lösningen ges implicit av
$$G(u(x)) = F(x) + C, \quad C \text{ godtycklig konstant}$$

Om G är inverterbar gäller
$$u(x) = G^{-1}(F(x)+C)$$

Bevis: Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx} G(u(x)) = g(u(x))u'(x) = f(x)$$

Vi bestämmer primitiv funktioner

$$G(u(x)) = F(x) + C$$

Exempel: (Variabelseparation)

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{u}, \quad u(1) = 1$$

Funktionen $\frac{x}{u}$ är Lipschitz-kontinuerlig i närheten av punkten $(1,1)$.

Vi har $u\frac{du}{dx} = x \iff$ det är ofta enklare att tänka "$u\,du = x\,dx$" $\Rightarrow \underbrace{\int u\,du}_{G(u)} = \underbrace{\int x\,dx}_{F(x)}$

$\Rightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$. Notera att med $g(u) = u$ blir $G(u) = \frac{u^2}{2}$, $f(x) = x$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$

Begynnelsevillkoret ger $C = 0$ alltså $\frac{u^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ eller $|u| = |x|$. Eftersom $u(1) = 1$ måste därför $u(x) = x$.

Sats 3.4 (Integrerande faktor)

Låt $f(x)$ ha primitiv $F(x)$ och låt g vara kontinuerlig. Då gäller att

$$\frac{d}{dx}u(x) + f(x)u(x) = g(x)$$

har lösning

$$u(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\,dx.$$

Bevis: Produktregeln:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}u(x)\right) = f(x)e^{F(x)}u(x) + e^{F(x)}u'(x) = e^{F(x)}g(x).$$

Vi bestämmer primitiv funktion och får $u(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\,dx$ ☒

Exempel: (Fritt fall)

Vi har formeln

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \quad . \quad v(0)=0 \quad x(0)=h$$

Låt $m=10\,kg$, $k=2\,kg/s$, $g=9.8\,m/s^2$ och $h=100\,m$. Vi får

$$v'(t) = -9.8 - 0.1v(t), \quad v(0)=0$$

eller $v'(t)+0.1v(t) = -9.8$.

Integrerande faktorn är $e^{0.1t}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{0.1t}v(t)\right) = e^{0.1t}v'(t)+0.1e^{0.1t}v(t)$$

$= -9.8e^{0.1t}$. Vi integrerar

$$e^{0.1t}v(t) = -98\left(e^{0.1t}-1\right) \quad \text{eller}$$

$$v(t) = -98\left(1-e^{-0.1t}\right)$$

Hastigheten går mot -98 då $t\to\infty$

Om kroppen inte slår i först. Positionen $x(t)$ ges av

$$x(t) = 100 + \int_0^t v(t)\,dt = 100 - 980(e^{-0.1t}-1) - 98t$$

Tiden till nedslag är lösningen till ekvationen $x(t)=0$. Vi uttrycker det som en fixpunkts-iteration

$$t = g(t) := \frac{100}{98} - 10(e^{-0.1t}-1).$$

Vi noterar att $|g'(t)|<1$ $t>0$ så Banachs fixpunktsats ger konvergens.

Lösningen blir $t^* = 4.885$, alltså $x(t^*) = x(4.88) \approx 0$.

Exempel (Integrerande faktor)

Studera $\begin{cases} u'(x) + xu(x) = x^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$

Vi har att $f(x) = x$ och $g(x) = x^3$.

Då blir $F(x) = \frac{x^2}{2}$ och den integrerande faktorn $e^{x^2/2}$.

Vi får $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}u(x)\right) = e^{x^2/2}(u'(x) + xu(x)) = x^3 e^{x^2/2}$. Vi tar primitiv på båda sidor och använder partiell integration.

$$e^{x^2/2}u(x) = \int x^3 e^{x^2/2}dx = \int x^2 \cdot x e^{x^2/2}dx =$$

$$= e^{x^2/2} \cdot x^2 - \int 2x e^{x^2/2} dx =$$

$$= x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C = e^{x^2/2}(x^2-2) + C$$

$u(0) = 0$ ger $0 = e^{0^2/2}u(0) = e^{0^2/2}(0-2) + C \Rightarrow$

$C = 2$

Vi får $u(x) = x^2 - 2 + 2e^{-x^2/2}$ genom att dividera med $e^{x^2/2}$.

3.4 Andra ordningens ODE

Andra ordningens DE är centrala inom fysiken. Newtons andra lag, vågutbredning är två exempel.

Definition 3.5 (Andra ordningens ODE)

En andra ordningens ODE kan skrivas på formen $F\left(\frac{d^2}{dx^2}u, \frac{d}{dx}u, u, x\right) = 0$

Reduktion av andra ordningens ODE till första ordningen.

En differentialekvation på formen

$$F\left(\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{du}{dx}, x\right) = 0$$

kan skrivas om som en första ordningens ODE i variabeln $v = \frac{du}{dx}$. Vi får

$$F\left(\frac{d}{dx}v, v, x\right) = 0.$$

<u>Exempel</u>: Studera ODE

$$\frac{d^2u}{dx^2} = x\left(\frac{du}{dx}\right)^2, \quad u(0)=1, \quad u'(0)=-2$$

Låt $v = \frac{du}{dx} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}v = xv^2, \quad v(0) = -2$$

Denna ODE är separabel

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = x \quad \text{eller} \quad \int \frac{1}{v^2}dv = \int x\,dx$$

Så $-\frac{1}{v} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow v(x) = -\frac{2}{x^2+C_1}$

$-2 = v(0) \Rightarrow C_1 = 1$

$$u(x) = -2\int \frac{dx}{1+x^2} = -2\arctan(x) + C_2$$

$u(0) = C_2 = 1 \Rightarrow$

$$u(x) = 1 - 2\arctan(x).$$

Om $F\left(\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{du}{dx}, u\right) = 0$ ger $v = \frac{du}{dx}$ att

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}v(u) = \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx} = v\cdot\frac{dv}{du}.$$

Vi får

$$F\left(v\frac{dv}{du}, v, u\right) = 0$$

Första ordningens ODE i v löses med tekniker från 3.3.

Givet $v(u)$ får vi u genom att lösa ODE $\frac{du}{dx} = v(u)$.

Exempel: Lös $u \frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{du}{dx}\right)^2$.

Låt $v = \frac{du}{dx}$, $u \cdot \underbrace{v \frac{dv}{du}}_{\frac{d^2u}{dx^2}} = v^2$

eller $\frac{1}{v}\frac{dv}{du} = \frac{1}{u} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{du}{u}$

$\ln|v| = \ln|u| + C \Rightarrow v = Cu$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = Cu \Rightarrow u(x) = De^{cx}$

En andra ordningens ODE innehåller typiskt 2 integrations-konstanter som bestäms av begynnelsevärden.

Existens av lösning till andra ordningens ODE behandlar vi först i kapitel 5 om system av ODE där högre ordnings system av ODE skrivs om till system av första ordningen. Existens och entydighet bygger igen på Picards sats.