F09

* Linjära ODE
* Konstanta koefficienter
* Eulers ekvation
* Inhomogena ekvationer

Kap 3.5 - 3.6

3.5 Linjära ODE

Definition 3.6 (Linjär ODE)

En linjär ODE är en ODE som kan skrivas på formen

$$(*)\quad a_n(x)\,u^{(n)} + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,u^{(1)} + a_0(x)\,u^{(0)} = f(x)$$

Om $f(x)=0$ är ODE linjär homogen.

Notera att bara u behöver förekomma linjärt, $a_i(x)$ kan bero olinjärt på x.

Derivatan är en linjär operation eftersom

$$\frac{d}{dx}(Au + Bv) = A\frac{d}{dx}u + B\frac{d}{dx}v, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Givet u, v kallas $Au + Bv$, $A, B \in \mathbb{R}$ linjärkombination av u och v.

Sats 3,6 (Linjärkombination av homogen lösn.)

Om u_1 och u_2 är lösningar till samma linjära homogena ODE så är varje linjärkombination också en lösning.

Bevis: Låt u_1 och u_2 lösa

$$a_n(x)u_i^{(n)} + a_{n-1}(x)u_i^{(n-1)} + \dots + a_0(x)u_i^{(0)} = 0.$$

Då gäller att $u = Au_1 + Bu_2$ löser

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)u^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\left(Au_1^{(j)} + Bu_2^{(j)}\right) =$$

$$= A\sum_{j=1}^{n} a_j(x)u_1^{(j)} + B\sum_{j=1}^{n} a_j(x)u_2^{(j)} = 0. \blacksquare$$

En linjärkombination av alla homogen-lösningar kallas den allmänna homogenlösningen. En lösning till den inhomogena ekvationen ($f \neq 0$) kallas partikulärlösning.

Sats 3.7 homogen + partikulärlösning

Vi studerar

$$(**)\quad a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_0(x)u^{(0)} = f.$$

Om u_p löser (**) så är u också en lösning om och endast om $u = u_p + u_h$ där u_h är en homogen lösning till (*).

Bevis: Vi sätter in $u = u_p + u_h$ i vänsterledet i (**).

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)(u_p+u_h)^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)u_p^{(j)} + \sum_{j=0}^{n} a_j(x)u_h^{(j)} =$$

$= f(x)$. Å andra sidan om u löser (**) gäller att $u - u_p$ är homogen lösning eftersom

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)(u-u_p)^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)u^{(j)} - \sum_{j=0}^{n} a_j(x)u_p^{(j)} = f - f = 0 \blacksquare$$

Definition 3.7 (oberoende lösningar)

Lösningar $u_1, \dots, u_n$ till en linjär n:te ordningens ODE kallas linjärt oberoende om $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n = 0 \; \forall x$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Man kan visa att en linjär homogen ODE av ordning n har n linjärt oberoende lösningar. Det görs enklast med tekniker från kapitel 5.

I fallet $n=2$ gäller att om u_1 är en lösning till en homogen linjär ODE fås en annan oberoende lösning genom ansatsen $u_2 = v \cdot u_1$, där v löser en separabel ODE.

3.6 Analytiska lösningar till 2:a ord. ODE

Sats 3.8 (Konstanta koefficienter)

Låt $u(t)$ lösa $a\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + cu = 0$, där $a, b, c \in \mathbb{R}$ och $a \neq 0$. Låt vidare den karakteristiska ekvationen $ar^2 + br + c = 0$ ha lösningar $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. Den allmänna lösningen ges av

$b^2 > 4ac \qquad u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad r_1 \neq r_2$

$b^2 = 4ac \qquad u(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt}, \quad r_1 = r_2 = r$

$b^2 < 4ac \qquad u(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$
$r = \alpha \pm i\beta.$

Bevis: Vi ansätter $u(t) = e^{rt}$ i ekvationen

$$0 = a\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + cu = (ar^2 + br + c)e^{rt} \Rightarrow$$

$ar^2 + br + c = 0$ med lösningar

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Om $b^2 > 4ac$ blir $r_1 \neq r_2$ reella

Vi får två oberoende lösningar

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

Om $b^2 = 4ac$ blir r reell dubbelrot

En lösning ges av $u(t) = e^{rt}$

Vi ansätter $u_2 = v(t)e^{rt}$ och sätter in

$$0 = au_2'' + bu_2' + cu_2 = a(v(t)e^{rt})'' + b(v(t)e^{rt})' + cv(t)e^{rt}$$

$$= e^{rt}(av'' + \underbrace{(2ar+b)}_{\substack{r=-\frac{b}{2a}\\ =0}}v' + \underbrace{(ar^2+br+c)}_{=0}v) =$$

$= ae^{rt}v''$. $v''=0$ har lösning $v = At + B$.

Vi oberoende lösningar ger

$$u(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt}$$

$b^2 < 4ac$ ger komplexkonjugerade rötter

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Två oberoende lösningar ges av

$$\tilde{u}_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \text{ och } \tilde{u}_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$u_1(t) = \frac{\tilde{u}_1(t)+\tilde{u}_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

$$u_2(t) = \frac{\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_2(t)}{2i} = e^{\alpha t}\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i} = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

ger två oberoende reella lösningar

$$u(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + Be^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Vi använder att $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

<u>Exempel</u>: Lös $u'' + u' - 2u = 0$

med begynnelsevillkor $u(0) = 0$, $u'(0) = 3$

Karaktäristiska ekvationen blir med $u = e^{rt}$

$0 = u'' + u' - 2u = (r^2 + r - 2)e^{rt} \Rightarrow r^2 + r - 2 = 0$

med lösningar $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Den allmänna homogena lösningen ges av $u(t) = Ae^{t} + Be^{-2t}$

$u(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A.$

$u'(0) = A - 2B = 3A = 3 \Rightarrow A = 1,\ B = -1$

$$u(t) = e^{t} - e^{-2t}.$$

Tekniken att ansätta e^{rt} fungerar för n:te ordningens linjära ODE. Den karakteristiska ekvationen blir av grad n med n lösningar.

Sats 3,9 (Eulers ekvation)

$$ax^2\frac{d^2u}{dx^2}+bx\frac{du}{dx}+cu=0,\ a,b,c\in\mathbb{R},$$

$a\neq 0$, och $x>0$. Ansatsen $u=x^r$ ger karakteristisk ekvation $ar^2+(b-a)r+c=0$ med rötter $r_1,r_2\in\mathbb{C}$. Den allmänna lösningen $u(x)$ ges av

$(b-a)^2>4ac$: $u(x)=Ax^{r_1}+Bx^{r_2}$, $r_1\neq r_2$

$(b-a)^2=4ac$: $u(x)=Ax^r+B\ln(x)x^r$, $r=r_1=r_2$

$(b-a)^2<4ac$: $u(x)=Ax^{\alpha}\cos(\beta\ln x)+Bx^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$, $r=\alpha\pm i\beta$.

Bevis: Insättning av $u(x)=x^r$ ger

$$0=ax^2(x^r)''+bx(x^r)'+cx^r=x^r(ar(r-1)+br+c)=$$
$$=x^r(ar^2+(b-a)r+c)$$ med lösningar
$$r=\frac{a-b\pm\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a}$$

Om $(b-a)^2\neq 4ac$ får vi två olika rötter
$(b-a)^2>4ac \Rightarrow r_1,r_2$ reella och lösningen ges av $u(x)=Ax^{r_1}+Bx^{r_2}$.

Om $(b-a)^2<4ac$ blir de komplexa $r=\alpha\pm i\beta$

$$x^r=x^{\alpha\pm i\beta}=x^{\alpha}x^{\pm i\beta}=x^{\alpha}e^{\pm i\beta\ln x}=x^{\alpha}(\cos(\beta\ln x)\pm i\sin(\beta\ln x))$$

Vi får två oberoende lösningar

$$u(x)=Ax^{\alpha}\cos(\beta\ln x)+Bx^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$$

Slutligen $(b-a)^2=4ac$ ger $r=r_1=r_2=\frac{a-b}{2a}$.
Vi får en lösning i x^r och den andra genom insättning av $u=vx^r$

$$0=ax^2u''+bxu'+cu=\dots=ax^{r+2}v''+(2ar+b)x^{r+1}v'$$
$$+(ar^2+(b-a)r+c)vx^r=ax^{r+2}v''+ax^{r+1}v'=$$
$$=ax^{r+1}(xv''+v')$$

Eftersom $x>0$ måste $xv''+v'=0$

Denna ekvation kan reduceras till separabel 1:a ordningens ODE (Problem 3.6) med lösning $v(x)=A+B\ln x$. Den allmänna lösningen ges av

$$u(x)=Ax^r+B\ln(x)\cdot x^r$$

Exempel: (Eulers ekvation) Lös

$$2x^2u''-xu'-2u=0,\quad u(1)=5,\ u'(1)=0$$

Låt $u=x^r \Rightarrow x^r(2r(r-1)-r-2)=0$ med rötter eller $2r^2-3r-2=0$

$r_1=-\frac{1}{2}$, $r_2=2$. Allmänna lösningen ges av $u(x)=C_1x^{-1/2}+C_2x^2$.

$u(1)=C_1+C_2=5$

$u'(x)=-\frac{1}{2}C_1x^{-3/2}+2C_2x \Rightarrow u'(1)=-\frac{1}{2}C_1+2C_2=0$

så $C_1=4C_2$, $C_1=4$, $C_2=1 \Rightarrow$

$$u(x)=4\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2,\quad x>0.$$

* Inhomogena ekvationer.

$$(*)\quad a_2\frac{d^2u}{dx^2}+a_1\frac{du}{dx}+a_0u=f(x).$$

Partikulärlösning fås genom att ansätta (gissa) en lösning.

Exempel: $u''+u'-2u=4x$ finn partikulärlösning. Vi ansätter $u_p=Ax+B$

$\Rightarrow 4x=u_p''+u_p'-2u=A-2(Ax+B)=A-2B-2Ax$.

$A=-2$, $B=-1 \Rightarrow u_p=-2x-1$.

Karakteristisk ekvation ger $u_h=C_1e^x+C_2e^{-2x}$

så $u(x)=-2x-1+C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

* Sammanfattning

Satser (3.2) Picard
3.3 Separabel ODE
3.4 Integrerande faktor

I övrigt: Reduktion till 1:a ordningen, homogen + partikulär, oberoende lösningar, konstanta koefficienter, Euler, Inhomogena