$\boxed{F10}$

* Laplace transform
* Skalning
* Derivator och integraler

Kapitel 4.1-4.3

4.1 Definition av Laplacetransform

Motiverande exempel

$$y'(t)+y(t)=e^{-2t}, \quad y(0)=0.$$

Vi vill lösa denna ODE analytiskt.

Vi multiplicerar med e^{-st}, $s>0$ och integrerar $\int_0^\infty$. Vi antar vidare att integralerna är konvergenta $\Rightarrow \lim_{t\to\infty}(|y'(t)|+|y(t)|)e^{-st}=0$

$$\int_0^\infty y'(t)e^{-st}\,dt+\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt=\int_0^\infty e^{-2t}e^{-st}\,dt$$

Partiell integration ger pga gränserna

$$\underbrace{\left[y(t)e^{-st}\right]_0^\infty}_{=0}+s\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt+\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt=$$

$$=\left[\frac{-1}{s+2}e^{-(s+2)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{s+2}$$

Vi låter nu $Y(s) = \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt$

$$s Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{eller}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2},$$

där $A(s+2) + B(s+1) = 1$ eller

$A = -B$, $2A + B = 1$, $B = -1$ $A = 1$

$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$. Vi vill hitta

$y(t)$ s.a $\int_0^\infty y(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

Vi har redan att $\int_0^\infty e^{-2t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+2}$

på samma sätt gäller $\int_0^\infty e^{-t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+1}$

$$\therefore \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-2t}) e^{-st} dt = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

och alltså $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

$*$ Definition av Laplace transform

Låt $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ vara begränsad av $|f(t)| \leq C e^{at}$ för konstanter C, a. Laplacetransformen av f ges av

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \ Re(s) > a$$

Vi använder även notationen

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s).$$

<u>Sats 4.1</u> (Laplacetransform väldefinierad)

Laplacetransformen är väldefinierad för funktioner $|f(t)| \leq C e^{at}$ givet att $Re(s) > a$, alltså integralen

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \text{ är konvergent.}$$

Bevis! Låt $s = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x = \mathrm{Re}(s) > a$

$$|F(s)| \le \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \right| \le C \int_0^\infty |e^{-(x+iy)t}| \cdot e^{at}\,dt$$

$$\le C \int_0^\infty e^{-xt} |e^{-iyt}| \cdot e^{at}\,dt = C \int_0^\infty e^{(a-x)t}\,dt =$$

$$= C \left[\frac{1}{a-x} e^{(a-x)t} \right]_0^\infty = \frac{C}{x-a} < \infty \quad \blacksquare$$

Ex: Låt $f(t) = e^t$. Därmed $|e^t| \le C e^{at}$ med $C = a = 1$. Låt $\mathrm{Re}(s) > 1$. $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^t\,dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t}\,dt$

$$= \left[\frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-1}$$

eftersom $|e^{(1-s)t}| = |e^{-iyt}| \cdot |e^{(1-x)t}| = e^{(1-x)t}$

$\to 0$ då $t \to \infty$, $x > 1$.

Ex: $f(t) = 1$, $t > 0$

$|f(t)| \le C e^{at}$, $C = 1$, $a = 0$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

* Egenskaper

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))(s) = \int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st}\,dt$$

$$= \alpha \mathcal{L}(f(t))(s) + \beta \mathcal{L}(g(t))(s) \quad \text{Linjär!}$$

Givet $F(s)$ gäller

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} F(a+i\omega) e^{(a+i\omega)t}\,dt$$

(invers Laplacetransform)

För att använda detta krävs otta djupare kunskaper om integration i det komplexa talplanet.

Entydigheten hos Laplacetransformen gör att vi kan konstruera tabeller och bestämma inversen på det viset.

4.2 Skalning

Sats 4.2 (Skalning)

Låt $f(t)$ ha Laplacetransform $F(s)$ och $\alpha > 0$. Då gäller att $g(t) = f(\alpha t)$ har Laplacetransform

$$G(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Bevis:

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(\alpha t)\,dt = \left\{ \begin{matrix} \tau = \alpha t \\ d\tau = \alpha\,dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad \square$$

Ex: $g(t) = e^{3t}$, $f(t) = e^t$, $F(s) = \frac{1}{s-1}$

ger att $G(s) = \frac{1}{3} F\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{s}{3} - 1} = \frac{1}{s-3}$

* **Exponentiell skalning**

Sats 4.3: (Exponentiell skalning)

Låt $f(t)$ ha Laplacetransform $F(s)$. Då har $g(t) = e^{\alpha t} f(t)$ Laplacetransform $G(s) = F(s-\alpha)$.

Bevis:

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} f(t)\,dt = F(s-\alpha) \quad \square$$

Ex: Låt $g(t) = e^{\alpha t} \cdot 1$. Vi har att $f(t) = 1 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$. Vi får

$$G(s) = F(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}.$$

4.3 Laplacetransform av derivator

Sats. 4.4 Laplacetransform av derivator

Låt $f(t)$ vara en deriverbar funktion sådan att $|f(t)| \le Ce^{at}$. Låt $f(t)$ ha Laplacetransform $F(s)$. Då gäller

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0).$$

Bevis: Partiell integration ger

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt =$$

$$= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= -f(0) + sF(s), \quad Re(s) > a,$$

eftersom $s = x+iy$, $x > a$ ger

$$\lim_{t\to\infty} \left|e^{-(x+iy)t} f(t)\right| \le \lim_{t\to\infty} |e^{-xt}|\cdot|e^{iyt}|\,|f(t)| \le \lim_{t\to 0} e^{(a-x)t} = 0$$

Ex: Högre ordningens derivator

$$\mathcal{L}(f''(t))(s) = s\mathcal{L}(f'(t)) - f'(0) =$$

$$= s^2\mathcal{L}(f(t))(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f'''(t))(s) = s\mathcal{L}(f''(t)) - f''(0) =$$

$$= s^3\mathcal{L}(f(t))(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

Sats. 4.5 Låt $f(t)$ ha $\mathcal{L}$-transform $F(s)$,

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0).$$

Ex: Låt $f(t) = e^t \Rightarrow f'(t) = e^t$

Vi har $F(s) = \frac{1}{s-1}$, $Re\, s > 1$

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0) = \frac{s}{s-1} - 1$$

$$= \frac{s}{s-1} - \frac{s-1}{s-1} = \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(f(t))(s).$$

* Laplacetransform av integral

Sats 4.6 Laplacetransform av integral

Låt $|f(t)| \le Ce^{at}$ med Laplacetransform $F(s)$. Låt $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$. Då gäller

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s), \quad Re(s) > a.$$

Bevis: Partiell integration

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau)\,d\tau\,dt =$$

$$= \left[\frac{-1}{s} e^{-st} g(t)\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} g'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{s} F(s) \quad \text{eftersom } g(0) = 0.$$

Ex: Låt $f(t) = 1$ $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau = t$

$$\mathcal{L}(t)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)(s) = \frac{1}{s} \cdot F(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Sats 4.7

Låt $f(t)$ ha Laplacetransform $F(s)$.

Då gäller $g(t) = tf(t) \Rightarrow G(s) = -F'(s)$

Bevis: $F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt =$

$$= -\int_0^\infty t e^{-st} f(t)\,dt = -G(s)$$

Ex: $\mathcal{L}(te^{-t})(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

Ex: $\mathcal{L}(t^2 e^{-t})(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{2}{(s+1)^3}$

Ex: $\mathcal{L}(t^k e^{-t})(s) = \frac{k!}{(s+1)^{k+1}}$

(Visa detta!)