$\boxed{F12}$

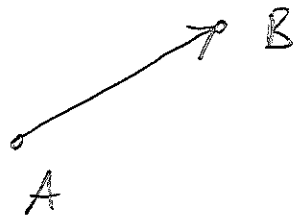
* Vektorer
* Matrisnotation
* System av ODE

Kapitel 5.1 - 5.2

5.1 Intro till linjär algebra

Vektorer har både storlek och riktning. Givet punkter A och B i R^n skriver vi vektorn

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$



Vektorns längd ges av avståndet mellan A och B och skrivs $|\vec{v}|$.

Vektorer har i allmänhet inte position. $\vec{v}$ och $\vec{w}$ anses lika om de har samma längd och riktning.

Därför kan en vektor i $\mathbb{R}^n$ beskrivas av n tal.

Definition Vektornotation

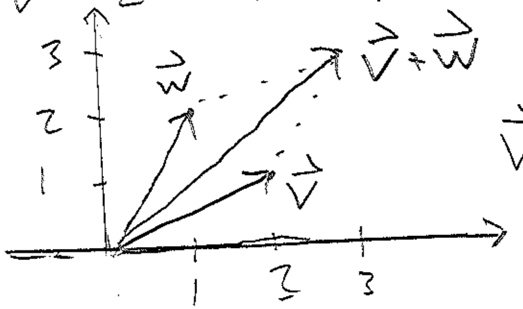
En vektor $\vec{v} = [v_1 \; v_2 \; v_3 \; \dots \; v_n]$ i $\mathbb{R}^n$ består av n element $v_i \in \mathbb{R}$.

- Vektorns egenskaper

Addition: $\vec{v} = [v_1 \; v_2 \; v_3 \dots v_n]$
$\vec{w} = [w_1 \; w_2 \; \dots \; w_n]$

$\Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = [v_1 + w_1 \; v_2 + w_2 \; \dots \; v_n + w_n]$

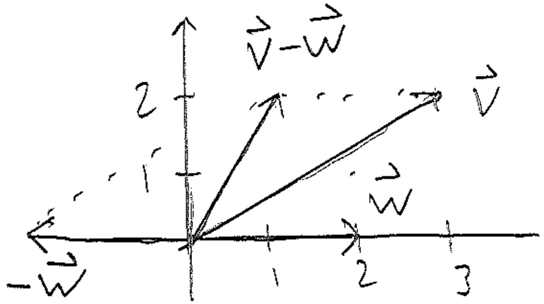
Ex: $\vec{v} = [2 \; 1]$ $\quad \vec{w} = [1 \; 2]$



$\vec{v} + \vec{w} = [2 \; 1] + [1 \; 2] = [3 \; 3]$

Subtraktion: $\vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1 \; v_2 - w_2 \; \dots \; v_n - w_n]$

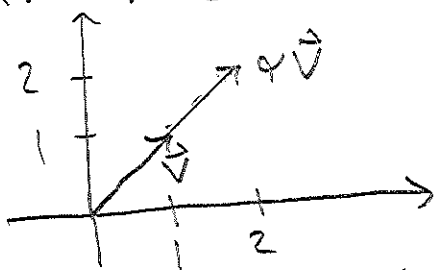
Ex: $\vec{v} = [3 \; 2]$ $\quad \vec{w} = [2 \; 0]$



$\vec{v} - \vec{w} = [3 \; 2] - [2 \; 0]$
$= [1 \; 2]$.

Multiplikation med skalär:
$\alpha \vec{v} = [\alpha v_1 \; \alpha v_2 \; \dots \; \alpha v_n]$

Ex: $\vec{v} = [1 \; 1]$, $\alpha = 2$



Räknelagar:
$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
$(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$
$\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{w}$
$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-1)\vec{w}$

* Skalärprodukt och längd

Givet $\vec{v} = [v_1\ v_2\ ..\ v_n]$ och

$\vec{w} = [w_1\ w_2\ \dots\ w_n]$ ges

skalärprodukten av

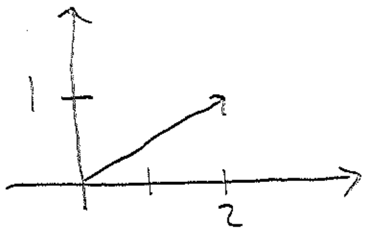
$$\vec{v} \circ \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = $$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Längden ges av $|\vec{v}| = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2} =$

$$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Ex: $\vec{v} = [2\ \ 1]$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$



Pythagoras sats!

* Enhetsvektorer

Låt $\vec{e}_1 = [1\ 0\ 0 \dots 0]$

$\vec{e}_2 = [0\ 1\ 0 \dots 0]$

$\vdots$

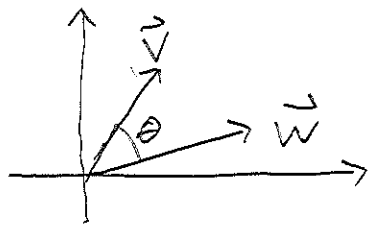
$\vec{e}_n = [0 \dots \ 0\ 1]$

Då gäller att $\vec{v} = [v_1\ v_2\ ..\ v_n] = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$

och $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$

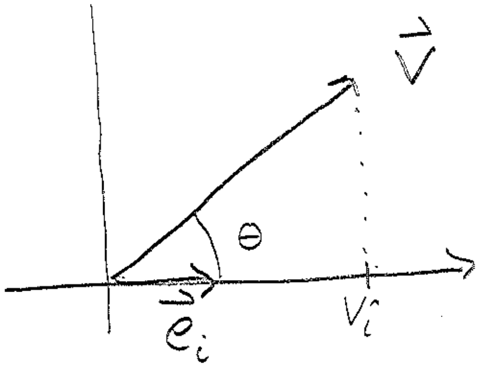
Geometrisk definition av skalärprodukt

$$\vec{v} \circ \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\theta$$



Om $\theta = \frac{\pi}{2}$ är vektorerna vinkelräta eller ortogonala. Om $\theta = 0$ får vi längden av $\vec{v}$ i kvadrat.

* Ekvivalens mellan definitionerna



Geometriska definitionen ger

$$\vec{v}\cdot\vec{e}_i = |\vec{v}|\cdot|\vec{e}_i|\cdot\cos\theta = |\vec{v}|\cdot\cos\theta = v_i$$

därmed gäller att de är ekvivalenta för skalär-produkt med $\vec{e}_i$.

Men eftersom varje $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i\vec{e}_i$

gäller att $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\sum_{i=1}^{n} w_i\vec{e}_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{e}_i}_{\text{geometrisk def.}} = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$$

* Matrisnotation

En $n\times m$ matris A är ett rektangulärt talschema med element $a_{ij}\in\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Addition och multiplikation med skalär görs elementvis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ & & \\ a_{n1}+b_{n1} & & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

En $1 \times m$ matris kallas radvektor och en $n \times 1$ matris kallas kolumnvektor. En kolumnvektor kan skrivas $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ .. \ v_n]^T$, där T kallas transponat. Vidare gäller

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \\ a_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

* Matrisvektor multiplikation

Produkten sker genom att ta skalärprodukt mellan rader i matrisen A och vektorn $\vec{x}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + \dots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \end{bmatrix}$$

Notera att antal kolumner i matrisen måste vara samma som antal element i vektorn.

$\underline{Ex}$: $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

* Linjära ekvationssystem

Ett linjärt ekvationssystem av n ekvationer och n obekanta kan skrivas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Notera att vi valt $m = n$. Eller på matrisform

$A\vec{x} = \vec{b}$ där matrisen A har element a_{ij}, $1 \le i,j \le n$ och kolumnvektorerna $\vec{x}$ och $\vec{b}$ har element x_i respektive b_i $1 \le i \le n$

Ex: Lösning med substitution.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + x_3 = 3 & (2) \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 & (3) \end{cases}$$

På matrisform får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ekvation (2) ger $x_3 = 3 - 2x_1$.

Insättning i (1) och (2) ger

$x_1 + x_2 - 3 + 2x_1 = 1$, $x_1 - x_2 - 3 + 2x_1 = -1$

eller $3x_1 + x_2 = 4$, $3x_1 - x_2 = 2$

Vi löser ut x_2 ur den andra $x_2 = 3x_1 - 2$

Vilket ger $3x_1 + 3x_1 - 2 = 4$ eller $6x_1 = 6$

$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$

5.2 System av ODE (linjärt)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} u_1(x) = a_{11}(x) u_1(x) + \dots + a_{1n} u_n(x) + b_1(x) \\ \frac{d}{dx} u_2(x) = a_{21}(x) u_1(x) + \dots + a_{2n} u_n(x) + b_2(x) \\ \vdots \\ \frac{d}{dx} u_n(x) = a_{n1}(x) u_1(x) + \dots + a_{nn} u_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $u_j(0) = c_j$ $j = 1, \dots, n$

På matrisform får vi

$$\frac{d}{dx} \vec{u}(x) = A(x) \vec{u}(x) + \vec{b}(x), \quad \vec{y}(0) = \vec{c}$$

Ex: Studera $\begin{cases} \frac{d}{dx} y_1(x) = 2y_2(x) \\ \frac{d}{dx} y_2(x) = -y_1(x) \end{cases}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$

Skriv på matrisform och lös med substitution.

Låt $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ och

$\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi får

$$\frac{d}{dx} \vec{y}(x) = A\vec{y}(x), \quad \vec{y}(0) = \vec{c}.$$

Substitution ger $y_2(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} y_1(x)$.

Insatt i andra ekvationen får vi

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} y_1(x) = -y_1(x) \text{ eller } \frac{d^2}{dx^2} y_1(x) + 2y_1(x) = 0$$

Den karakteristiska ekvationen ges av $r^2 + 2 = 0$ med lösningar $r_1 = i\sqrt{2}$, $r_2 = -i\sqrt{2}$. Därför får vi

$$y_1(x) = A\cos(x\sqrt{2}) + B\sin(x\sqrt{2})$$

$$y_1(0) = A = 0$$

$$y_2(0) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} y_1(x)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} B \cos(0\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow B = \sqrt{2}$$

$$y_1(x) = \sqrt{2} \sin(x\sqrt{2})$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} y_1(x) = \cos(x\sqrt{2}).$$