$\boxed{F13}$

* System av första ordningen
* Existens och entydighet
* Högre ordningens ODE som system av första ordningen.

Kapitel 5.2 - 5.4

5.2 Allmänt system av 1:a ordningen

Ett system av n ekvationer med n obekanta

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} u_1(x) = f_1(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)) \\ \frac{d}{dx} u_2(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) \\ \vdots \\ \frac{d}{dx} u_n(x) = f_n(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)) \end{cases}$$

$u_j(0) = c_j \quad , \quad 1 \leq j \leq n.$

På vektorform får vi

$$\frac{d}{dx} \vec{u}(x) = \vec{f}(x, \vec{u}(x)) \quad , \quad \vec{u}(0) = \vec{c}.$$

där $\vec{f}$ har element f_i,

$\vec{u}$ har element u_i och $\vec{c}$ element c_i

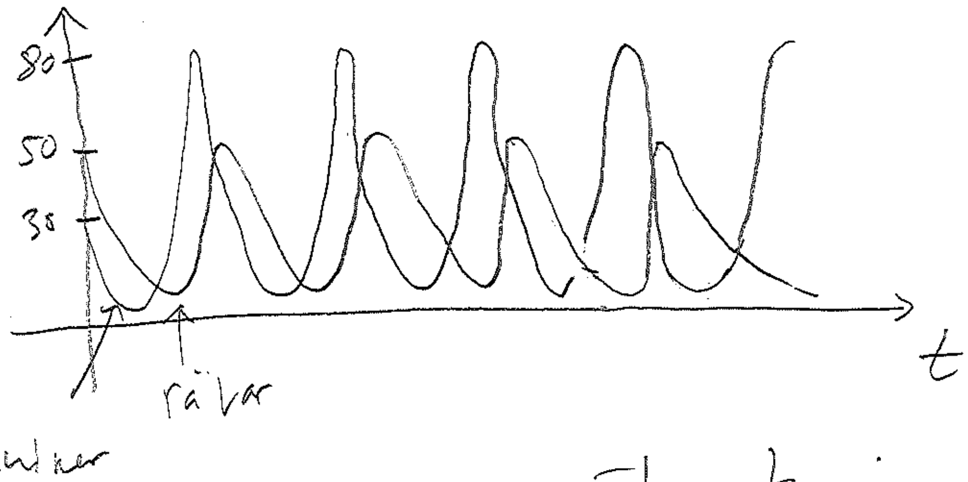
$1 \leq i \leq n$

Ex: Volterra-Lotkas ekvation som modellerar rävar och kaniner.

Kaniner: $\dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - by(t))$, $x(0) = x_0$

Rävar: $\dfrac{dy(t)}{dt} = -y(t)(c - dx(t))$, $y(0) = y_0$

* $ax(t)$ anger att populationen kaniner växer exponentiellt i avsaknad av rävar
* $-bx(t)y(x)$ påverkar antal kaniner negativt och mäter sannolikheten att kaniner träffar på rävar.
* $dx(t)y(t)$ på samma sätt men positivt för rävarna
* $-cy(t)$ avtar rävarna exponentiellt i avsaknad av kaniner



När rävarna avtar ökar kaninerna men då ökar rävarna igen. Lösningen är periodisk.

5.3 Existens och entydighet av lösning

Vi formulerar först en generalisering av Picards sats till n dimensioner.

En vektorvärd funktion $\vec{f}(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$ av $n+1$ variabler är kontinuerlig om dess element f_i, $i = 1, \dots, n$ är kontinuerliga

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1(x, u_1, \dots, u_n) \\ f_2(x, u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f_n(x, u_1, \dots, u_n) \end{bmatrix}.$$

$\vec{f}$ är Lipschitzkontinuerlig med avseende på $\vec{u} = [u_1\ u_2\ \dots\ u_n]^T$ om för varje $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ och $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$\| \vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{z}) \| \le L \| \vec{y} - \vec{z} \| ,$$

där $\| v \| = \max_{a \le x \le b} | \vec{v}(x) |$ ← mäter längden av vektorn.

Sats 5.4 Existens och entydighet

Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \vec{u}(x) = \vec{f}(x, \vec{u}(x)) & , x \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n \\ \vec{u}(x_0) = \vec{u}_0 & , \vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

där $\vec{f}$ är kontinuerlig och Lipschitz-kontinuerlig med avseende på $\vec{u}$ har en entydig lösning för alla x.

Om $\vec{f}$ bara är Lipschitz-kontinuerlig i ett område kring $\vec{y}_0$ gäller att det finns en entydig lösning i en omgivning till x_0.

Detta resultat finns formulerat som sats 5.3.

Bevisen av satserna ligger utanför kursen och är markerade med ✡ i boken.

Sats 4.4 ger att om $\vec{f}$ är en linjär funktion

$$\vec{f}(x, \vec{y}(x)) = A(x)\vec{y}(x) + b(x)$$

att vi har existens av lösning för alla x eftersom linjära funktioner är Lipschitzkontinuerliga.

Ex: Låt $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{f}(x, \vec{y}) = A\vec{y}$. Visa att $\vec{f}$ är Lipschitzkontinuerlig i $\vec{y}$.

Låt $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$. Vi får

$$\|A\vec{y} - A\vec{z}\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} y_2 - z_2 \\ 2y_1 + y_2 - 2z_1 - z_2 \end{bmatrix} \right\| = \left((y_2 - z_2)^2 + (2y_1 + y_2 - 2z_1 - z_2)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left((y_2 - z_2)^2 + (2(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2))^2 \right)^{1/2} \le \begin{cases} (a-b)^2 \ge 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \\ ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \end{cases}$$

$$\le \sqrt{(y_2 - z_2)^2 + 4(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + 2(y_1 - z_1)^2 + 2(y_2 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{4(y_2 - z_2)^2 + 6(y_1 - z_1)^2} \le \sqrt{6}\sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{6}\,\|\vec{y} - \vec{z}\|.$$

→ Högre ordningens ODE som system av första ordningen.

Sats 5.1

Låt $F(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$ vara en funktion av $n+1$ variabler och $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$ en uppsättning reella tal. En n:te ordningens ODE,

$$u^{(n)} = F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n-1)}),$$

$$u^{(i)}(0) = c_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

kan skrivas som ett system av 1:a ordningens ODE.

Bevis: Låt $\vec{u}$ vara en kolumnvektor $[u_1\ u_2 \dots u_n]^T$. Låt

$$u_i = u^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad u^{(0)} = u$$

Då får vi

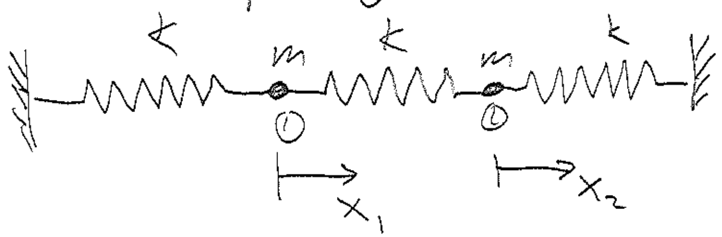
$$\begin{cases} \frac{d}{dx} u_1(x) = u_2(x) \\ \frac{d}{dx} u_2(x) = u_3(x) \\ \frac{d}{dx} u_{n-1}(x) = u_n(x) \\ \frac{d}{dx} u_n(x) = F(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $u_i(0) = c_{i+1}$. ☐

Högre ordnings ODE kan alltså skrivas om som system av första ordningen.

Existenssatsen 5.4 kan alltså tillämpas på en stor mängd problem.

* Tillämpningar: Masser och fjädrar



Vi har $F = kx$ där x är avvikelsen från fjäderns jämviktsläge

k fjäderkonstant,

F kraft.

$$m\ddot{x}_1 = F = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = F = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

Om $x_2 > x_1 \Rightarrow$ positiv kraft på ① och negativ på ②.

Låt nu $x_3 = \dot{x}_1$ och $x_4 = \dot{x}_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k/m & k/m & 0 & 0 \\ k/m & -2k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

I Matlab löses detta med

```
[t,x] = ode45(@funk,[0 T],[0 0 1 -1]);
function xprim = funk(t,x)
  xprim = A*x;
```

ode45, ode23,... fungerar bara på system av första ordningen, ej högre ordning. Därför måste högre ordnings ekvationer skrivas om enligt ovan.