$\boxed{\text{F14}}$

* Definition av funktioner som lösningar till differentialekvationer

* e^x, $\log x$

* $\sin x$, $\cos x$

Kapitel 5.5 – 5.6

5.5 Alternativ definition av exp och ln

Givet $\vec{f}(t, \vec{u}) \in \mathbb{R}^d$ Lipschitz kontinuerlig har begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \vec{u}' = \vec{f}(t, \vec{u}) \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

entydig lösning.

Många elementära funktioner, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, ... är lösningar till vanligt förekommande (enkla) differentialekvationer.

Man kan därför definiera dem som lösningar till ODE.

* e^x, senc $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ ej så naturlig

Definitionen $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$ säger inte mycket om varför e^x är en så vanligt förekommande funktion inom vetenskapen.

Alternativ definition: Låt $\exp(kx)$ vara den entydiga lösningen till ODE:n

$$\begin{cases} y'(x) = k y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

"Förändringen är proportionell mot populationen"

Givet denna definition får vi med $y_1 = \exp(k_1 x)$ och $y_2 = \exp(k_2 x)$ att $y_3 = y_1 \cdot y_2$ löser,

$$y_3'(x) = (y_1(x) y_2(x))' = y_1'(x) y_2(x) + y_1(x) y_2'(x) = (k_1 + k_2) y_1(x) y_2(x)$$

$$= (k_1 + k_2) y_3(x) \quad \text{samt}$$

$$y_3(0) = y_1(0) \cdot y_2(0) = 1 \quad \text{alltså}$$

$$y_3(x) = \exp((k_1 + k_2)x)$$

Trivialt gäller $\frac{d}{dx}\exp(kx) = \frac{d}{dx} y(x) = k y(x)$

$$= k \exp(kx).$$

* Inversen till e^x.

Låt $k=1$. Vi vill definiera en funktion $v(y)=x$, där $y=e^x$, alltså inversen till exponentiell ftn.

Derivera med avseende på x:

$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}v(y(x)) = v'(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= v'(y)\cdot y \Rightarrow v'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$v(y) = \int_{y(0)=1}^{y} \frac{1}{z}\,dz = \int_{1}^{y} \frac{1}{z}\,dz$$

Vi definierar detta som $v(y) = \log y$,

$$\log y = \int_{1}^{y} \frac{1}{z}\,dz$$ Mer naturlig def.

* Härledning av formeln för e.

Vi vill beräkna $y(1)$ där,

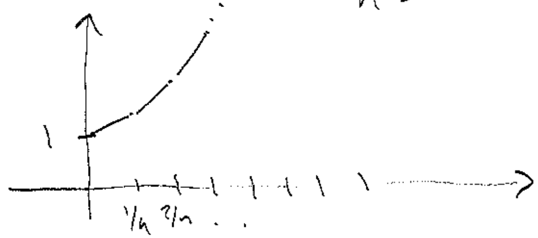
$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Vi delar in $[0,1]$ i n delintervall och använder Eulers metod (Kap 6)

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{1/n} = y^{n-1} \Rightarrow y^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)y^{n-1} =$$

$$= \dots = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n y^0 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Vi låter nu $n\to\infty$. Vi vet att framåt Euler konvergerar mot $y(1)$ alltså $y(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.



* Definition av e^{-x}

Vi definierar $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$$\frac{d}{dx} e^{-x} = \frac{d}{dx}\frac{1}{e^x} = -\frac{\frac{d}{dx}e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$$

alltså löser e^{-x}

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & x>0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

* a^x för godtyckligt a.

Låt $a^x = e^{x\log a}$ $\Rightarrow$ Lösning till

$$\begin{cases} y'(x) = \log a \, y(x), & x>0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Vi har $a^x \cdot a^y = e^{x\log a} \cdot e^{y \log a} = e^{(x+y)\log a} = a^{x+y}$.

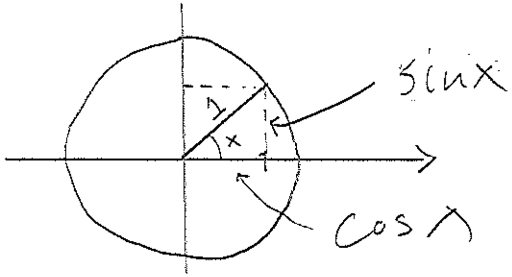
5.6 Sin x, cos x

Senare: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

$\cos'' x + \cos x = 0$

$\sin'' x + \sin x = 0$

Traditionell definition:



Alternativ definition för sin x:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, & x>0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Entydig lösning existerar.

Vi deriverar: $y'''(x) + y'(x) = 0 \Rightarrow$

$z(x) = y'(x)$ löser $z''(x) + z(x) = 0$

$z(0) = y'(0) = 1$

$z'(0) = y''(0) = -y(0) = 0$

Vi låter detta definiera $\cos x := z(x)$

* Härledning av traditionell definition av $\sin x$

Vi noterar att

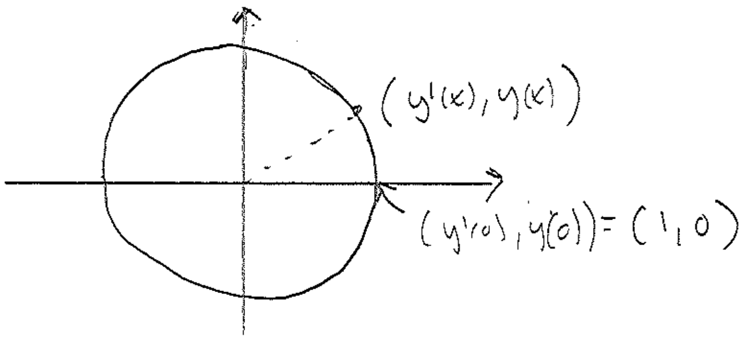
$$\frac{d}{dx}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'\cdot y'' + 2y\cdot y' =$$

$$= 2y'(y'' + y) = 0 \Rightarrow$$

$(y')^2 + y^2 =$ konstant. Vidare

$$y'(0)^2 + y^2(0) = 1 \Rightarrow$$

$$(y'(x))^2 + y(x)^2 = 1$$



x ger en parametrisering av kurvan $(y'(x), y(x))$. En punkt rör sig kontinuerligt längs kurvan moturs när x ökar. Hastigheten ges av

$$\frac{d}{dx}(y'(x), y(x)) = (y''(x), y'(x)) = (-y(x), y'(x))$$

och farten är $\sqrt{y'(x)^2 + (-y(x))^2} = 1$

Alltså hinner vi ett varv då x (cirkelns omkrets) går från 0 till 2π

$$y(x) = y(x + 2\pi) = y(x + k\cdot 2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Detta innebär att den traditionella definitionen är uppfylld, $y(x) = \sin x$

* Trigonometriska räkne regler

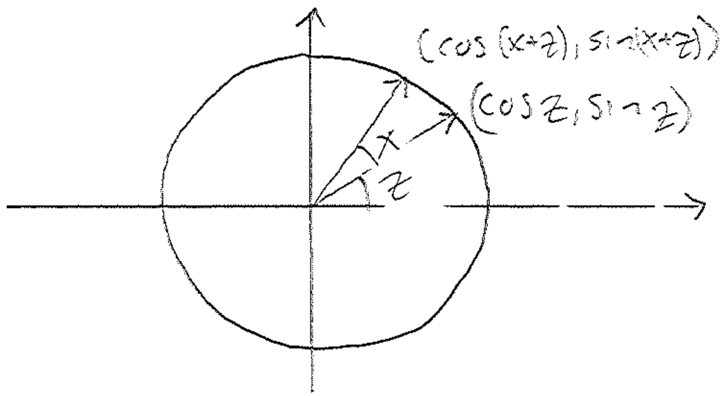
Vi har direkt $y(x)^2 + y'(x)^2 = 1 \Rightarrow$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Vidare låt
$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

linearitet $\Rightarrow y(x) = \alpha\cos x + \beta \sin x$ (testa (lösningen!))

Låt nu $\alpha = \sin z$ och $\beta = \cos z$



Vi har att $y(x) = \sin(x+z)$ löser
$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = \sin z \\ y'(0) = \cos z \end{cases}$$

Lösningen är entydig. Men vi har ju redan att $\alpha\cos x + \beta \sin x = \sin z \cos x + \cos z \sin x$ löser samma ekvation, alltså

$\sin(x+z) = \sin z \cos x + \cos z \sin x.$

Motsvarande relation för cos fås genom derivering

$$\cos(x+z) = \frac{d}{dx}\sin(x+z) = \frac{d}{dx}\sin z \cos x$$
$$+ \frac{d}{dx}\cos z \sin x = -\sin z \sin x + \cos z \cos x$$
$$= \cos x \cdot \cos z - \sin x \cdot \sin z$$

Ur dessa följer direkt

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, låt $z = x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, låt $z = x$

* Sammanfattning 5

- * Vektorer och matriser
- * Linjära ekvationssystem
- * Existens och entydighet av System av ODE
- * Sats 5.1 högre ordningens som system av 1:a ordningens
- * Alternativa definitioner av e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$