$\boxed{\text{F17}}$

* Generalisering till system av ODE
* Metodernas egenskaper
* Randvärdesproblem

Kap 6.5 - 6.6

6.5 Generalisering till system

Vi kan uttrycka högre ordningens ODE som system av första ordningen ODE som system av första ordningen

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t)), & t \in [t_0, T] \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Våra numeriska metoder går att använda direkt. Vi låter $\vec{u}_i$ vara den numeriska approximationen till $\vec{u}(t_i)$. I vektornotation har vi

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, u_1, u_2, \ldots, u_d) \\ f_2(t, u_1, u_2, \ldots, u_d) \\ \vdots \\ f_d(t, u_1, u_2, \ldots, u_d) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(c) \\ u_2(c) \\ \vdots \\ u_d(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$$

Låt $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, $k_i = t_i - t_{i-1}$

Eulers metod:

$$\vec{u}_i = \vec{u}_{i-1} + k_i \cdot \vec{f}(t_{i-1}, \vec{u}_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n$$

Bakåt Euler:

$$\vec{u}_i = \vec{u}_{i-1} + k_i \cdot \vec{f}(t_i, \vec{u}_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

Mittpunktsmetoden:

$$\vec{u}_i = \vec{u}_{i-1} + k_i \cdot \vec{f}\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}, \frac{\vec{u}_i + \vec{u}_{i-1}}{2}\right), \quad i = 1 \ldots n$$

Bakåt Euler och mittpunktsmetoden är båda implicita och kräver ekvationslösning med fixpunktsiteration.

Konvergenshastigheten beror på $\vec{f}$:s

Lipschitz konstant.

$$\max_{t \in [t_0, T]} |f(t, \vec{u}) - f(t, \vec{z})| \leq L |\vec{u} - \vec{z}|, \quad \vec{u}, \vec{z} \in \mathbb{R}^d$$

Exempel: (Lipschitzkonstant)

Låt $\vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2u_2 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix}$

$$|\vec{f}(t, \vec{u}) - \vec{f}(t, \vec{z})| = \left| \begin{bmatrix} 2 - 2u_2 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 - 2z_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 2(z_2 - u_2) \\ (u_1 - z_1) + (u_2 - z_2) \end{bmatrix} \right| = \sqrt{4(u_2 - z_2)^2 + ((u_1 - z_1) + (u_2 - z_2))^2}$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{b^2}{2} \\ a = u_1 - z_1 \\ b = u_2 - z_2 \end{array} \right\} \leq \sqrt{4(u_2 - z_2)^2 + 2(u_1 - z_1)^2 + 2(u_2 - z_2)^2}$$

$$\leq \sqrt{6(u_2 - z_2)^2 + 2(u_1 - z_1)^2} \leq \sqrt{6}\, |\vec{u} - \vec{z}|,$$

eftersom $|\vec{u} - \vec{z}| = \sqrt{(u_1 - z_1)^2 + (u_2 - z_2)^2}$.

Sats 6.3 (Konvergensanalys för Eulers metod)

Om $\vec{f}(t,\vec{u})$ är Lipschitzkontinuerlig med avseende på $\vec{u}$ och $\max_{t_0 \le t \le T} |\vec{u}''| \le M$ gäller för approximationen med Eulers metod $\vec{U}_n$ att

$$|\vec{u}(t_n) - \vec{U}_n| \le \frac{Mk}{2L}\left(e^{L(t_n - t_0)} - 1\right)$$

Bevis: Följer av det skalära fallet $d=1$.

Eulers metod och Bakåt Euler är 1:a ordningen och Mittpunktsmetoden är 2:a ordningen.

* Stabilitet

Mer komplicerat i d dimensioner och kräver djupare kunskaper i Linjär algebra. Bakåt Euler har dock fortfarande stort stabilitetsområde och Eulers metod är instabil för problem med stora variationer i lösningen.

* Energibevarande metod

Förutom konvergens och stabilitet har metoderna andra egenskaper. Mittpunktsmetoden bevarar energi i följande mening.

Exempel (Energibevarande)

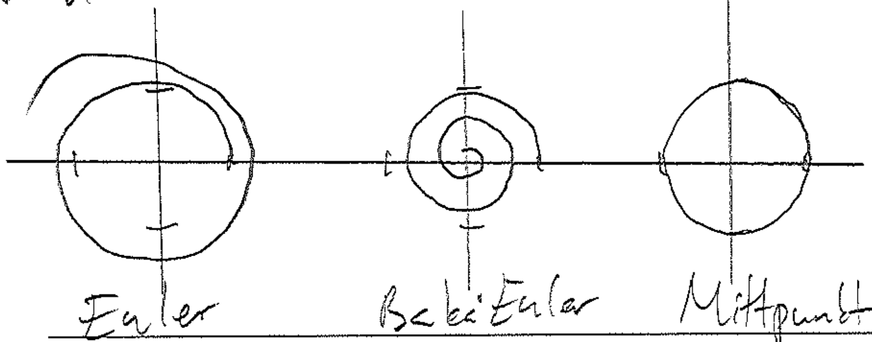
$u(t) = \cos(t)$ och $z(t) = \sin(t)$ löser

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eftersom
$$u'(t) = -z(t)$$
$$z'(t) = u(t)$$

Energin $E(t) = \frac{1}{2}\left(u(t)^2 + z(t)^2\right) = \frac{1}{2}$

Om vi löser ekvationen numeriskt på $[0, 10\pi]$ med 1000 steg $k = \frac{\pi}{100}$ får vi



6.6 Randvärdesproblem

Begynnelsevärdesproblem anger startvärden för $u(0), u'(0), ..$

Randvärdesproblem ger villkor både i början och slutet $u(0) = ..$ $u(L) = ..$

Exempel (Värmeledning)

Värmeledning i en endimensionell stav beskrivs av Poisson's ekvation

$$-\frac{d}{dx}\left(k \frac{du}{dx}\right) = q(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = u(L) = 0 \text{ där}$$

u är tempartur, k värmeledningskoefficient och $q(x)$ värmetillförsel.

Vi skriver ekvationen som ett system av första ordningen. Låt $u_1 = u$, $u_2 = \frac{du}{dx}$ vilket ger

$$\frac{du_1}{dx} = u_2, \quad u_1(0)=0, \quad u_1(L)=0$$

$$\frac{du_2}{dx} = -\frac{q(x)}{k}, \quad u_2(0)=?$$

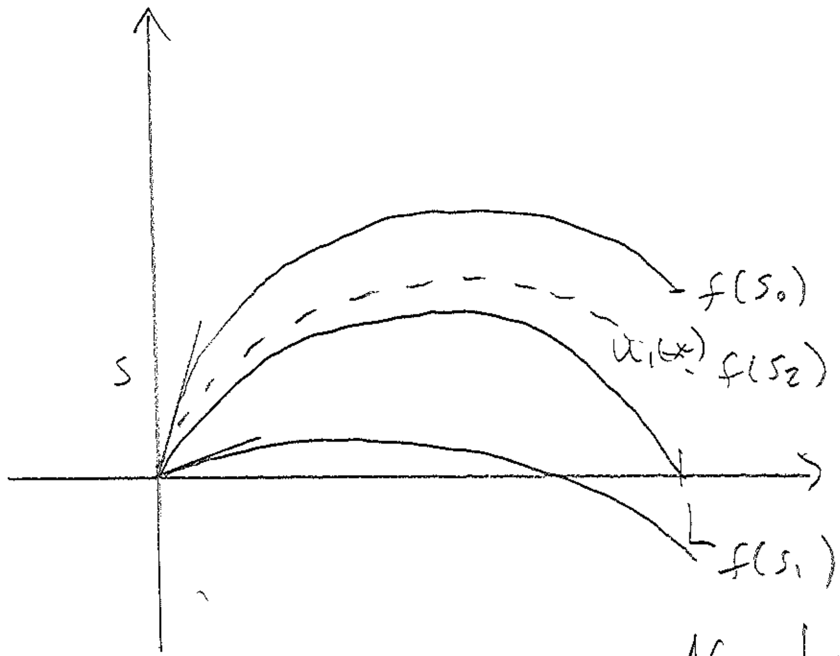
* Inskjutning.

Eftersom vi inte känner $u_2(0)$ kan vi inte använda våra ODE lösare. Inskjutning innebär att vi gissar på ett värde $u_2(0)=s$ och löser ekvationen numeriskt vilket ger $\begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix}$ approximativt.

Vi evaluerar $u_1(L)(s)$ som beror på s, $f(s) := u_1(L)(s)$.

Vi vill lösa ekvationen $f(s)=0$ men varje funktionsevaluering $f(s_i)$ innebär att en ODE måste lösas. Vi använder bisektion med startvärden $f(s_0)\cdot f(s_1) < 0$ alltså med olika tecken.

Lösningen s bestämmer begynnelsevärdet $u_2(0)=s$.



Bisektion konvergerar. Newton kan också användas. I flervariabel-analys kommer vi lära er finita elementmetoden som är en bättre metod för att lösa randvärdesproblem också i högre dimension.

Sammanfattning Kap 6

Sats 6.1 Konvergens av Eulers metod.

- Eulers metod, Bakåt Euler, Mittpunktsmetoden.
- Stabilitet
- Konservering av energi
- Randvärdesproblem
- inskjutning