$\boxed{F18}$

* Tyngdpunkt
* Centroid
* Guldins regel

Kap 7.1

7.1 Tyngdpunkt / masscentrum

Låt $\rho(P)$ vara densiteten i punkten P. Massan Δm av ett litet volymselement ΔV innehållande P ges av $\Delta m \approx \rho(P)\Delta V$. I gräns har vi $dm = \rho(P)dV$ eller

$$m = \int dm = \int \rho(P)\, dV.$$

Exempel:

Vi studerar en cylinder av höjd H och bas med area A. Vi låter densiteten variera som $\rho(h) = \rho_0(1+h)$, där h är höjd.

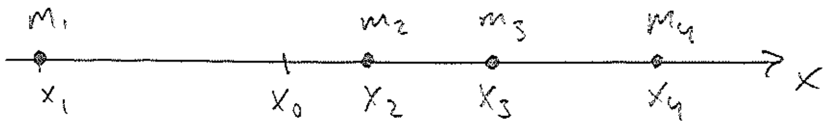
Massan ges av

$$m = \int_0^H \rho_0 A (1+h)\, dh = \rho_0 A \left(H + \frac{H^2}{2}\right)$$

* Massmoment

Moment kring en punkt x_0 av en massa m placerad i punkt x ges av $m(x - x_0)$. Givet flera massor $m_1, m_2, \dots, m_n$ i punkter $x_1, x_2, \dots, x_n$ ges momentet kring $x = x_0$ av

$$M_{x=x_0} = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_0)m_2 + \dots$$
$$\dots + (x_n - x_0)m_n = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_0) m_j$$



Masscentrum / tyngdpunkten är den punkt $\bar{x}$ kring vilket momentet är 0.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x}) m_j = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{x} m_j \Rightarrow$$

med $m = \sum_{j=1}^{n} m_j$, $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{m} = \dfrac{M_{x=0}}{m}$

I två dimensioner gäller för n punktmassor i $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

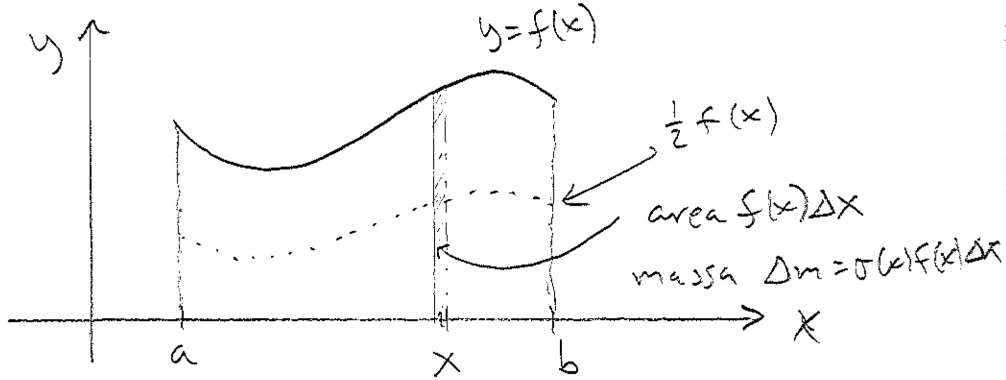
$$M_{x=0} = x_1 m_1 + \dots + x_n \cdot m_n = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j$$

$$M_{y=0} = y_1 m_1 + \dots + y_n \cdot m_n = \sum_{j=1}^{n} y_j m_j$$

och $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{m}$

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j m_j}{m}$$

* Masscentrum av ett begränsat område



Låt densiteten vara $\rho(x)$ alltså oberoende av y. Vi vill bestämma masscentrum av området $0 \le y \le f(x)$ $a \le x \le b$.

Massan av ett element

$$dm = \rho(x) f(x)\, dx \Rightarrow$$

$$m = \int_a^b \rho(x) f(x)\, dx$$

Momentet runt $x=0$

$$dM_{x=0} = x\rho(x) f(x)\, dx \Rightarrow$$

$$M_{x=0} = \int_a^b x\rho(x) f(x)\, dx$$

Eftersom $\rho(x)$ är oberoende från y är masscentrum av varje element $\bar{y}_{dm} = \frac{1}{2}f(x)$. Därför

$$dM_{y=0} = \bar{y}_{dm} \cdot dm = \frac{1}{2}\rho(x) f(x)^2\, dx$$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \rho(x) f(x)^2\, dx$$

Därför får vi

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\rho(x) f(x)\, dx}{\int_a^b \rho(x) f(x)\, dx} = \frac{M_{x=0}}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \rho(x) f(x)^2\, dx}{\int_a^b \rho(x) f(x)\, dx} = \frac{M_{y=0}}{m}$$

* Centroid

Om materian är jämt utspridd i ett område så att ρ är konstant beror bara masscentrum på objektets form. Då kallas masscentrum objektets <u>centroid</u>.

Låt $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ utgöra ett område i $\mathbb{R}^2$, då är centroiden

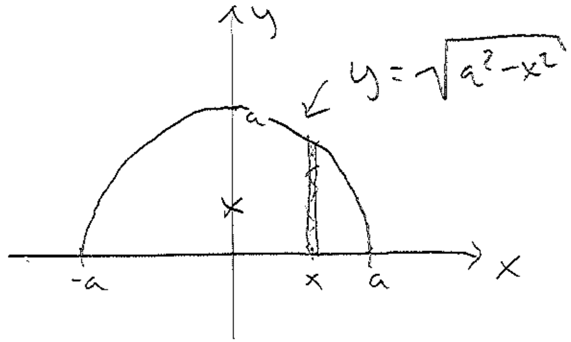
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_{x=0}}{A}, \frac{M_{y=0}}{A} \right),$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx, \quad M_{x=0} = \int_a^b x f(x)\,dx,$$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2\,dx$$

<u>Exempel</u>: Låt $-a \le x \le a$, $0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$

Bestäm centroiden.



$A = \frac{1}{2}\pi a^2$ (halvcirkel)

$$M_{x=0} = \int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 0 \text{ (udda)}$$

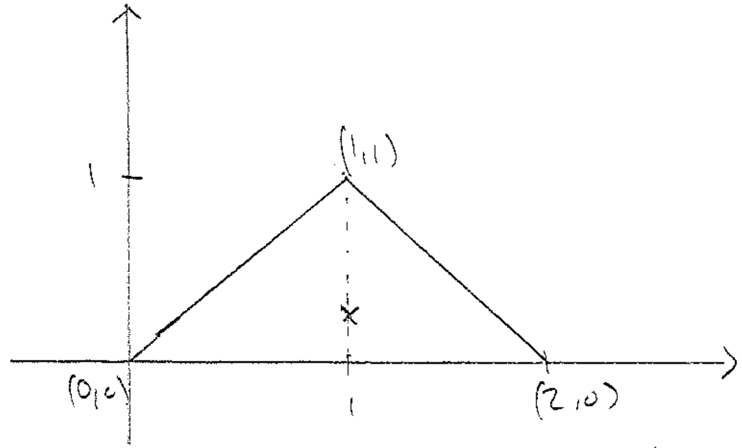
$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} a^2 - x^2\,dx = \frac{1}{2}2a^3 - \frac{1}{2}\frac{2a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

$\bar{x} = 0$

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A} = \frac{2a^3/3}{\pi a^2/2} = \frac{4a}{3\pi}$$

Exempel: (triangelns centroid)

Bestäm centroiden för en triangel med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$.



Symmetri ger $\bar{x} = 1$. $A = 1$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 (2-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left[-\frac{(2-x)^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

I allmänhet gäller för en triangel med hörn i (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) att

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

* Guldins regel / Pappus sats

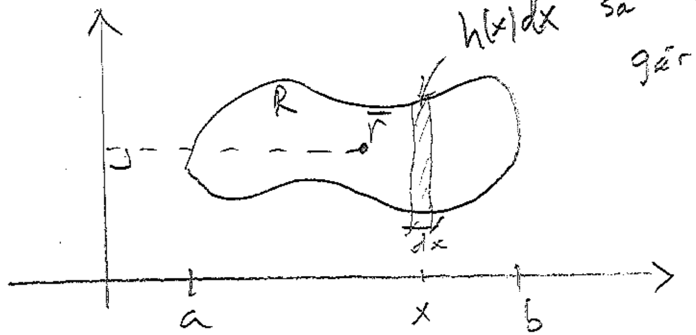
Sats 7.1

a) Ett område R i planet roterar runt en linje L. Volymen av den genererade kroppen ges av arean av R gånger längden som centroiden färdas. $V = 2\pi\bar{r}\cdot A$, där $\bar{r}$ är vinkelräta avståndet mellan centroiden av R och L.

b) Om en kurva C i planet på ena sidan av L roterar runt L och genererar en rotationsyta så är arean av ytan

$S = 2\pi\bar{r}\cdot s$ där s är kurvans längd och $\bar{r}$ vinkelräta avståndet mellan centroiden av C och L.

Bevis: Bara a. Vi väljer koordinatsystem så y-axeln går genom L.

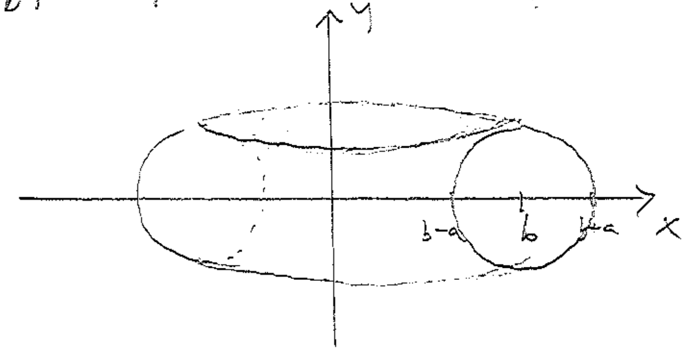


Då gäller att $\bar{r} = \bar{x}$, x-koordinaten av centroiden av R. Volymen

$$V = 2\pi\int_a^b x\,h(x)\,dx = 2\pi M_{x=0} = 2\pi\bar{x}A = 2\pi\bar{r}A. \qquad \blacksquare$$

Exempel: (torus)

Använd Guldins regel / Pappus sats för att bestämma volymen av en torus given av att rotera cirkeln $(x-b)^2+y^2 \le a$ runt y-axeln $0<a<b$



Centroiden är $(b,0)$, arean $A = \pi a^2$

$$\Rightarrow V = 2\pi b\,\pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b.$$