$\boxed{F19}$ * Sammanfattning av kursen

1. Integralen

Låt f vara begränsad på $[a,b]$,
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Undre Riemannsumman: $I_{min}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\Delta x_i$

Övre Riemannsumman: $I_{max}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\Delta x_i$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Om det finns endast ett I s.a. $I_{min}(f,P) \le I \le I_{max}(f,P)$ $\forall P$

Då gäller $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Kont $\Rightarrow$ integrerbar

<u>Sats 1.4</u> (Medelvärdessatsen)
Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$
Då finns $c \in [a,b]$ sådan att
$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$

<u>Sats 1.5</u> (Fundamentalsatsen)
Låt f vara kontinuerlig på ett intervall J innehållande $a \in J$.
Låt $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, då är F deriverbar på J och $F'(x) = f(x)$, F är primitiv-<u>funktion</u> till f.

Generaliserad integral.
$I = \int_a^b f(x)\,dx$, (i) $a = -\infty$, $b = \infty$
(ii) f obegränsad

Om $I = \pm\infty$ är den divergent annars konvergent

<u>Sats 1.8</u> (p-integraler)

(i) $\int_a^\infty x^{-p}\,dx = \begin{cases} \text{konvergent } \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \\ \text{divergent}, & p \le 1 \end{cases}$

(ii) $\int_0^a x^{-p}\,dx = \begin{cases} \text{konvergent } \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p<1 \\ \text{divergent}, & p \ge 1 \end{cases}$

2. Integrationstekniker

* Variabelsubstitution:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} u=g(x) & A=g(a) \\ du=g'(x)dx & B=g(b) \end{matrix} \right\} = \int_A^B f(u)\,du$$

* Partiell integration:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

* Rationella funktioner

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx, \quad q(x) = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x^2+b_1x+c_1)\cdots$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \dots$$

Linjära och kvadratiska nämnare kan bestämmas.

Sats 2.4 (Båglängd)

f kontinuerlig, deriverbar på $[a,b]$. Kurvans längd ges av $L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

Sats 2.5 (Volym som integral av area)

En kropp S med tvärsnitts area $A(x)$ har volym $V = \int_a^b A(x)\,dx$.

* Rotationskropp

x-axeln: $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$

y-axeln: $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$

* Numeriska metoder

Mittpunkt $I \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x_i$

Trapets $I \approx \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\Delta x_i$

Simpson.

Feluppskattningar. Matlab implementation!

3. Ordinära differentialekvationer

Lösningen är en funktion, en oberoende variabel, derivata med avseende på denna.

* Existens och entydighet

$$u'(x) = f(x, u), \quad u(0) = u_0$$

Picard ger existens och entydighet om f är Lipschitzkont. m.a.p. u.
Lokalt Lipschitz ger lokal lösning $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

* Separabel ODE

$$g(u)\frac{du}{dx} = f(x) \Rightarrow \int g(u)\,du = \int f(x)\,dx$$

Sats 3.4 (Integrerande faktor)

$u'(x) + f(x)u(x) = g(x)$ har lösning $u(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\,dx$

* 2:a ordningens ODE

$F(u'', u', u, x) = 0$ om

- $F(u'', u', x) = 0 \Rightarrow F(v', v, x) = 0$ med $u' = v$, alltså 1:a ordningen
- $F(u'', u', u) = 0 \Rightarrow F(v\frac{dv}{du}, v, u) = 0$ $u' = v(u)$, 1:a ordningen

* Linjära ODE

$au'' + bu' + cu = 0 \Rightarrow u(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ där $ar^2 + br + c = 0$ har lösningar $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$

Euler: $ax^2\frac{d^2u}{dx^2} + bx\frac{du}{dx} + cu = 0 \Rightarrow$
$u(t) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$ där $ar^2 + (b-a)r + c = 0$ har lösningar $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$

4. Laplace transform

Givet $|f(t)| \le Ce^{at}$ låter vi

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$ vara f:s Laplace-transform.

Sats 4.1 (Väldefinierad)

Om $|f(t)| \le Ce^{at}$ är $F(s)$ väldefinierad för $\mathrm{Re}(s) > a$.

* Skalning

Låt $g(t) = f(\alpha t) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

$g(t) = e^{\alpha t} f(t) \Rightarrow G(s) = F(s-\alpha)$

* Derivata

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0)$$

Sats 4.5 (Högre ordningens derivata)

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

* Integral

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s} F(s)$$

* Faltning, impuls, fördröjning

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u) g(t-u)\, du$$

$$\mathcal{L}((f*g)(t))(s) = F(s) \cdot G(s)$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0; & t \le 0 \end{cases} \quad \mathcal{L}(f(t-T)\theta(t-T)) = e^{-sT} F(s)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1.$$

* Lösa ODE

1) Laplacetransformera
2) Sätt in begynnelsevillkor
3) Lös algebraiska ekvationen
4) Bestäm den inversa Laplacetransformen

5. System av ODE

* Linjär algebra

- Vektorer, algebraiska egenskaper
- matris, matris-vektor multiplikation
- Lösning av linjära ekvationssystem med 2-3 obekanta genom substitution.

* System av ODE

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\vec{u}(x) = \vec{f}(x, \vec{u}(x)), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Existens och entydighet av lösning. (Picard).

Sats 5.1 Högre ordningens som system av lin

$u^{(n)} = F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n-1)})$

$u^{(i)}(0) = c_i, \quad i = 0, \dots, n-1$

Låt $u_i = u^{(i-1)} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = u_2 \\ \frac{du_2}{dx} = u_3 \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dx} = F(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}, \quad u_i(0) = c_i.$$

* Alternativ definition av e^x

$u'(x) = u(x), \quad u(0) = 1$

$\ln(x) = \int^x \frac{1}{z}\,dz$, härledning

$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ genom Eulers metod

* Alternativ definition av $\sin(x)$, $\cos(x)$

$u'' + u = 0$. Härledning av egenskaper.

6. Numerisk lösning av ODE

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Eulers metod

$$\frac{U_i - U_{i-1}}{k_i} = f(t_{i-1}, U_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n$$

Bakåt Euler

$$\frac{U_i - U_{i-1}}{k_i} = f(t_i, U_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Mittpunktsmetoden

$$\frac{U_i - U_{i-1}}{k_i} = f\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}, \frac{U_i + U_{i-1}}{2}\right), \quad i = 1, \dots, n$$

Sats 6.1 (Konvergens av Eulers metod)

$f(t,u)$ Lipschitzkontinuerlig i u med konstant L, $\max_t \left|\frac{d^2u}{dt^2}\right| < M$

$$|u(t_n) - U_n| \leq \frac{Mk}{2L}\left(e^{L(t_n - t_0)} - 1\right)$$

* Stabilitet $u'(t) = \lambda u(t)$, $u(0) = 1$

Eulers metod: $|1 + k\lambda| < 1$

Bakåt Euler: $|1 - k\lambda| > 1$

Mittpunktsmetoden? $\left|\frac{1 + k\lambda/2}{1 - k\lambda/2}\right| < 1$

* Metodernas egenskaper
* Algoritmer och Matlab implementation
* Generalisering till system
* Randvärdesproblem och inskjutning

7. Tyngdpunkt.

massa: $m = \int_a^b \rho(x) f(x)\,dx$

moment: $M_{x=0} = \int_a^b \rho(x)\, x f(x)\,dx$, $M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \rho(x) f(x)^2\,dx$

masscentrum: $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}$

Guldins regel: Ett område R med area A roterar runt linjen L på avstånd $\bar{r}$ från masscentrum. Volymen ges av

$$V = 2\pi \bar{r} \cdot A.$$