$\boxed{F20}$: * Övningstentan

10 uppgifter med endast svar (3p)

4 uppgifter med fullständiga lösningar (5p)

Max 50p (+7 bonus)

Betygsgränser: 3 (20p)
4 (30p)
5 (40p)

Inga hjälpmedel

Uppgift 1

Låt $f(x) = x$ och $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ vara en partition av $[0,1]$. Beräkna den övre Riemann summan.

Lösn:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i \quad \text{där } \Delta x_i = \frac{1}{n}, \; x_i = \frac{i}{n}$$

$u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ den punkt där f antar sitt maximala värde på $[x_{i-1}, x_i]$.

I detta fall $u_i = x_i$ eftersom $f(x)$ är växande

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}.$$

Uppgift 3

Beräkna $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

Lösn.

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = 1+x^3 \\ du = 3x^2dx \\ \frac{1}{3}du = x^2dx \end{array}\right\} =$$

$u(1) = 1+1^3 = 2$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\left[2\sqrt{u}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1).$$

$u(0) = 1+0^3 = 1$

Uppgift 5

Lös differentialekvationen

$$y'(x) + x^2 y(x) = x^2, \quad y(0) = 0$$

Lösn.

Vi använder integrerande faktor

$$\left(y e^{x^3/3}\right)' = y' e^{x^3/3} + x^2 y e^{x^3/3} = x^2 e^{x^3/3}$$

Vi integrerar

$$y(x) e^{x^3/3} - y(0) e^{0^3/3} = \int_0^x t^2 e^{t^3/3}\,dt =$$

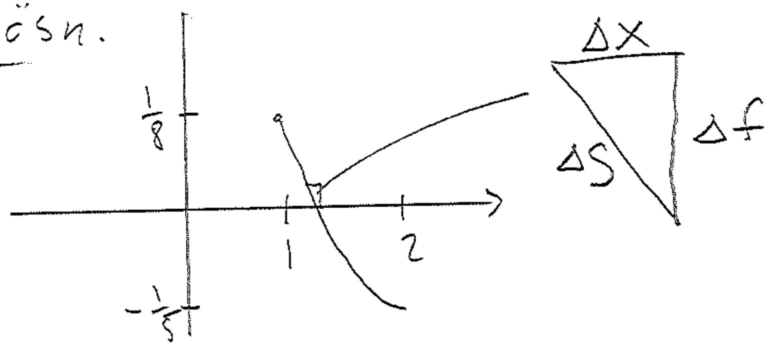
$$= \left[e^{t^3/3}\right]_0^x = e^{x^3/3} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 1 - e^{-x^3/3}}.$$

Uppgift 6

Beräkna längden av grafen till funktionen $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \log x$ mellan $x=1$ och $x=2$.

Lösn.



$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta f)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \quad \text{eller}$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$I = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \\ \Rightarrow f'(x)^2 + 1 = \\ = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \\ \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2 \end{array} \right\} = \int_1^2 \frac{x}{4} + \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{8} + \log x\right]_1^2 = \frac{3}{8} + \log 2$$

Uppgift 8

Vilken andra ordningens linjära differentialekvation löser $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$?

Lösn. Låt $y(x) = \sinh(x)$.

Vi noterar att $y'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

och att $y''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y(x)$.

Alltså löser $\sinh(x)$ ekvationen

$$y''(x) - y(x) = 0 .$$

(Begynnelsevillkoren ges av $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Uppgift 10

Beräkna Laplacetransformen till $\cos t$, $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos t \, dt$

Lösn

Vi har att
$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$
$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$
$$\Rightarrow e^{it} + e^{-it} = 2\cos t \Rightarrow$$
$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{it} + e^{-it})\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(i-s)t}}{i-s} - \frac{e^{-(i+s)t}}{i+s}\right]_0^\infty$$

$$= \left\{ \lim_{t\to\infty} \left| e^{(i-s)t} \right| = 0 \quad Re(s) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \left| e^{-(i+s)t} \right| = 0 \right\} =$$

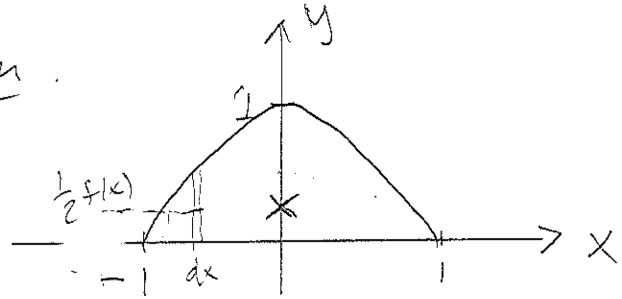
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+i+(s-i)}{(s-i)(s+i)}\right]$$

$$= \boxed{\frac{s}{s^2+1}}, \quad Re(s) > 0$$

Uppgift 12

Beräkna centroiden för det område i planet som begränsas av x-axeln och funktionen $f(x) = 1 - x^2$

Lösn.



Vi har att $\bar{x} = 0$ på grund av symmetri.

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} \quad \text{där} \quad m = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx \quad \text{och}$$

$$M_{y=0} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}f(x)\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx$$

Vi får $m = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = 2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$

$$= \frac{4}{3}, \quad M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\,dx =$$

$$= \int_{0}^{1} 1 - 2x^2 + x^4\,dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \tfrac{2}{5})}$$

Uppgift 14

```
h=0.1; x=0; y=1;
while x<1
    y = y+h*x*y*(1-y);
    x = x+h;
end
```

a) Vilken ekvation löser programmet?

b) Vilken numerisk metod är implementerad?

c) Vad approximerar utparametern y?

Lösn.

Första raden i loopen kan skrivas

$$y_{n+1} = y_n + h x_n y_n (1-y_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$y_0 = 1, \quad x_n = h \cdot n$$

a;b) Framåt Euler för att lösa

$(*)$ $z'(x) = f(x, z) = x z (1-z)$

c) y överlagras hela tiden. I sista iterationen innan vi lämnar while loopen är $x = 1$, $y = y_{10} \approx z(1)$

y approximerar $z(1)$, där z löser $(*)$.

Extra uppgift

Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = te^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

med Laplace transform. Hint

$$\mathcal{L}(t^n e^t)(s) = \frac{n!}{(s-1)^{n+1}}$$

Lösn: Laplacetransformering ger

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow (s^2 - 2s + 1) Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + 1$$

Därmed

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Vi har $\mathcal{L}(t^3 e^t)(s) = \dfrac{3!}{(s-1)^4} = \dfrac{6}{(s-1)^4}$

och därmed $\mathcal{L}(\frac{1}{6} t^3 e^t)(s) = \dfrac{1}{(s-1)^4}$

Vi får då $y(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t + te^t$