

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

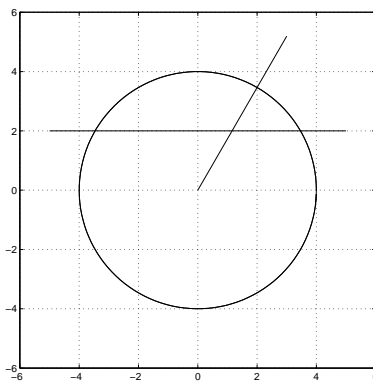
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ x - y + z = 4 \\ 3x - 4y + 2z = 9 \end{cases} \quad (3\text{p})$$

Svar:
$$\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$$

b) Rita följande mängder i komplexa talplanet:

$$\{z; \operatorname{Im} z = 2\}, \{z; |z| = 4\} \text{ och } \{z; \arg z = \frac{\pi}{3}\}. \quad (2\text{p})$$

Svar:



c) Bestäm alla reella lösningar x till ekvationen $|3x - 1| - |x - 4| = 2$. (3p)

Svar: $x = -\frac{5}{2}$ och $x = \frac{7}{4}$

d) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+3)}{\ln(x^2+1)}$. (2p)

Svar: $\frac{1}{2}$

e) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $2 \cos^2 x - \cos x = 1$. (3p)

Svar: $x = \frac{n2\pi}{3}$

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

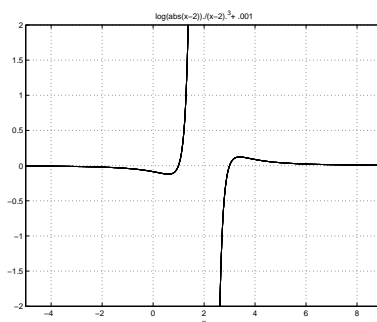
2. Visa att $\ln(1+x) > \frac{2x}{2+x}$ för alla $x > 0$. (6p)

3. Bestäm avståndet från punkten $(4, -3, 2)$ till planet $2x - y + 3z = 7$. (6p)

Svar: $\frac{5\sqrt{14}}{7}$

4. Skissa grafen till $f(x) = \frac{\ln|x-2|}{(x-2)^3}$. Ange var funktionen är växande respektive avtagande, lokala extrempunkter, asymptoter samt skärningspunkter mellan grafen och koordinataxlarna. (6p)

Svar: Asymptoter: $x = 2$ och $y = 0$. Lokaltokalt maximum i $(2 + e^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3e})$, Lokalt minimum i $(2 - e^{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{3e})$. Växande i $]2, 2 + e^{\frac{1}{3}}]$ och i $] -\infty, 2 - e^{\frac{1}{3}}]$. Avtagande i $[2 + e^{\frac{1}{3}}, \infty[$ och i $[2 - e^{\frac{1}{3}}, 2[$. Detta ger följande graf:



5. Beräkna för alla konstanter α gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)^\alpha - x^\alpha)$.
Tips: använd medelvärdessatsen. (6p)

Svar: Gränsvärdet är:
$$\begin{cases} \infty & \text{om } \alpha > 1 \\ 1 & \text{om } \alpha = 1 \\ 0 & \text{om } \alpha < 1 \end{cases} .$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

a) Låt f vara deriverbar i $] -\infty, \infty[$. Antag att f har precis tre olika nollställen. Då har f' minst två olika nollställen.

b) Låt f vara deriverbar i $] -\infty, \infty[$. Antag att f har precis tre olika nollställen. Då har f' högst två olika nollställen.

c) $\frac{\ln x}{\ln y} = \ln(x - y)$.

d) Om $f(x)$ är uppåt begränsad så är $\frac{1}{f(x)}$ nedåt begränsad.

e) Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in D_f$ så är f konstant.

f) Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in (0, 1)$ så är f konstant på $(0, 1)$.

Svar: a) sann, b) falsk, c) falsk, d) falsk, e) falsk, f) sann.

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I .

b) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

c) Visa, med hjälp av medelvärdessatsen, att en funktion f är strängt växande på intervallet I om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$.

(6p)