MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, TMV156
Tid: 2007-01-19, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Micke Persson, Lennart Falk
tel 0762- 721 860/0762- 721 861

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 22/1 .
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Ange absolutbelopp och ett argument för vart och ett av de komplexa talen $3 - 4i$ och $-7 + 3i$. (2p)

   b) Ange alla reella x som uppfyller olikheten $(x + 2)(x^2 + x - 6) \geq 0$. (2p)

   c) Beräkna $\sin \frac{\pi}{12}$. (2p)

   d) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + 8z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

   e) Ange följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2 + x^4}$ ii. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ iii. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3 \ln x}{x + \ln x}$

   f) Låt $f(x) = x^3 + 2x$ och notera att f är en injektiv (one-to-one) funktion. Beräkna $(f^{-1})'(3)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

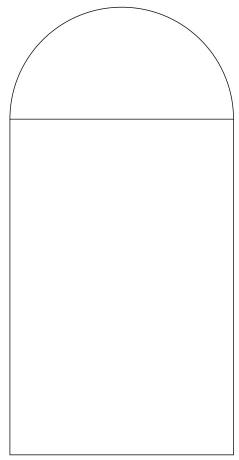
2. Ange på normalform en ekvation för det plan som är parallellt med vektorerna $(-1, -1, -1)$ och $(2, 1, 1)$ och innehåller punkten $(2, -1, 0)$.
Ange också en ekvation för den räta linje som är vinkelrät mot planet och går genom punkten $(-2, 2, 3)$. (6p)

3. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x + 4}$ i intervallet $x \geq 0$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$. (6p)
Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

Var god vänd!

5. Ett tvådelat fönster består av en rektangulär klar glasskiva och en halvcirkelformad färgad glasskiva (se fig). (6p)



Det färgade glaset släpper in hälften så mycket ljus som det klara. Om hela fönstrets omkrets är given, bestäm rektangelsidornas proportioner så att ljusinsläppet blir maximalt.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) För alla komplexa tal z och w gäller att $|z + w| \geq |z| + |w|$.
   b) $e^x > 1 + x$ för alla $x > 0$.
   c) Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) > g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så gäller också att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.
   d) Det finns minst ett reellt tal x sådan att $7x^{105} + 3x^{36} + 2x^{19} + 418 = 0$.
   e) Om $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är tre vektorer i ett och samma plan så gäller att $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.
   f) Om $f(0) = f''(0) = 0$ så måste också $f'(0) = 0$.

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a. (6p)
   b) Formulera satsen om mellanliggande värde för kontinuerliga funktioner (Intermediate Value Theorem).
   c) Låt f vara en kontinuerlig funktion från det slutna intervallet $[0, 1]$ till sig självt. Bevisa att det måste finnas minst en punkt $x \in [0, 1]$ sådan att $f(x) = x$.
   (Tips : Betrakta $f(x) - x$).

Lycka till!
LF

MATEMATIK
Chalmers

Lösningar

1.(a) $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$. $\arg(3-4i) = \arctan(-\frac{4}{3}) = -\arctan(\frac{4}{3})$, en vinkel i den 4:e kvadranten.
pss, $|-7+3i| = \sqrt{(-7)^2+3^2} = \sqrt{58}$ och $\arg(-7+3i) = \arctan(-\frac{3}{7})+\pi = \pi - \arctan(\frac{3}{7})$, en vinkel i andra kvadranten.
Svar: $|3-4i| = 5$, $\arg(3-4i) = -\arctan(\frac{4}{3})$, $|-7+3i| = \sqrt{58}$ och $\arg(-7+3i) = \pi - \arctan(\frac{3}{7})$.

(b) $(x+2)(x^2+x-6) \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x-2) \geq 0. \Leftrightarrow$
$-3 \leq x \leq -2$ eller $2 \leq x$
Svar: $[-3,-2] \cup [2,\infty[$

(c) Man använder följande fakta :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A \sin B,$$
$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Därmed har vi att

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Svar: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(d) Eliminering ger $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.
Svar:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-5t \\ y & = & 2+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$$

(e) (i)

$$\frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4} = \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{x^2(1+x^2)} = 4 \cdot \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Då $x \to 0$ så går båda kvoten mot 1, så svaret blir 4.
Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4} = 4$

(ii) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \dfrac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x+1} = \text{då } x \text{ är negativt} = -\dfrac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x} \to -1$

Svar: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = -1$

(iii)

$$\frac{2x+3\ln x}{x+\ln x} = \frac{2x\left(1+\frac{3\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)} = 2\cdot\frac{1+\frac{3\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}.$$

Eftersom $\frac{\ln x}{x} \to 0$ då $x\to\infty$ så är gränsvärdet lika med 2.

Svar: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3\ln x}{x+\ln x} = 2$

(f) Vi använder formeln

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

där $y = f(x)$. Här är $y = 3$ så vi söker x sådan att $3 = x^3 + 2x$. Man ser direkt att $x = 1$ (enda lösning, eftersom derivatan visar att f är växande). Eftersom $f'(x) = 3x^2 + 2$ för godtyckligt x så har vi att

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3\cdot 1^2+2} = \frac{1}{5}.$$

2. En normalvektor till planet är $(-1,-1,-1)\times(2,1,1) = (0,-1,1)$. En ekvation för planet genom $(2,-1,0)$ med denna normalriktning ges då av $(0,-1,1)\cdot(x-2, y-(-1), z-0) = 0$, dvs $0(x-2) - 1(y+1) + 1(z-0) = 0$. Förenklas till: **Svar: -y+z=1**.
Linjen genom $(-2,2,3)$ vinkelrät mot planet har riktningsvektorn $(0,-1,1)$ (planets normalvektor), och kan då i parameterform skrivas:
Svar: $(x,y,z) = (-2,2,3) + t(0,-1,1)$ eller $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (-\mathbf{2}, \mathbf{2}-\mathbf{t}, \mathbf{3}+\mathbf{t})$.

3. $x^2 + 4x + 4 > 0$ för alla x, alltså är $D_f = [0,\infty[$.

Vi har att $f(0) = -\frac{1}{4}$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-1/x}{x(1+4/x+4/x^2)} = 0$.

Vidare är $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+8}{(x+2)^4} = -\dfrac{x^2-2x-8}{(x+2)^4} = -\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x+2)^4} = -\dfrac{x-4}{(x+2)^3}$ vilket ger oss nedanstående teckentabell för derivatan.

x	0	$0<x<4$	4	$4<x$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	0

Svar: Största värdet är $f(4) = \frac{1}{12}$, minsta är $f(0) = -\frac{1}{4}$.

4. Notera att $x^2 + 3x + 3 > 0$ för alla reella x ty den kvadratiska ekvationen $x^2 + 3x + 3 = 0$ har två komplexa rötter. Så definitionsmängden till f är hela $\mathbb{R}$. Det finns ingen vertikal asymptot.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

   $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x(\Big(\frac{2\ln(x)\ln(1+3/x+3/x^2)}{x} - 1\Big) = -\infty$.

   Det finns således ingen horisontell asymptot.

   För att bestämma ev. sned asymptot beräknasr vi gränsvärdena:
   $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(\Big(\frac{2\ln(|x|)\ln(1+3/x+3/x^2)}{x} - 1\Big) = -1 = k$.

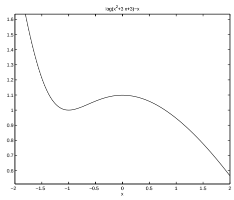
   och

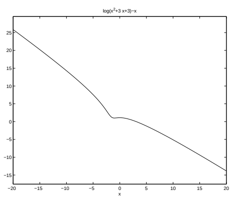
   $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2 + 3x + 3) = \infty$.
   Finns alltså ingen sned asymptot

   Vidare är $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = -\dfrac{x(x+1)}{x^2+3x+3}$ vilket ger oss nedanstående teckentabell för derivatan.

x	$-\infty$	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < \infty$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	-	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\ln(3)$	$\searrow$	$-\infty$

   Med stöd av tabellen ovan kan vi rita grafen till funktionen.





   Svar: Lokalt maximum i punkten $(0, \ln(3))$, lokalt minimum i punkten $(-1, 1)$. Inga asymptoter.

5. Låt rektangelns bas vara $2r$ och dess höjd h. Vi söker förhållandet mellan h och $2r$.

   Fönstrets omkrets är given, kalla den K. Vi har alltså $K = 2h+2r+\pi r$, vilket ger $h = (K - r(2+\pi))/2$. Arean av halvcirkeln är $\frac{1}{2}\pi r^2$, arean av rektanglen är $2rh = r(K - r(2+\pi))$.

   Ljusinsläppet är då, bortsett från någon konstant faktor beroende av glaskvalitet mm, $f(r) = \frac{1}{4}\pi r^2 + r(K - r(2+\pi)) = Kr - (2 + \frac{3}{4}\pi)r^2$.

   $f'(r) = K - 2(2 + \frac{3}{4}\pi)r$. Man ser direkt att $f'(r) > 0$ för $r < \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)}$ och att $f'(r) < 0$ för $r > \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)}$.

   f antar således sitt största värde för $r = \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)} = \frac{2K}{8+3\pi}$.

   Då är $h = (K - r(2+\pi))/r = (K - \frac{2K(2+\pi)}{8+3\pi})/2 = \frac{K(4+\pi)}{2(8+3\pi)}$.

   Förhållandet $h : 2r = \frac{K(4+\pi)}{2(8+3\pi)} / \frac{4K}{8+3\pi} = \frac{4+\pi}{8}$.

   Svar: $\dfrac{h}{2r} = \dfrac{4+\pi}{8}$.

6. a) **Svar:** Falskt. (Motexempel: $z = 1, \ w = i$).
   b) **Svar:** Sant. (Följer av Adams: sats 3.4 eller genom undersökning med derivata).
   c) **Svar:** Falskt. (Motexempel: $f(x) = 2, \ g(x) = \sin x$).
   d) **Svar:** Sant. (Polynomet har udda gradtal!)
   e) **Svar:** Sant. (Se Adams: kap. 10.3 sid 558).
   f) **Svar:** Falskt. (Motexempel: $f(x) = x$).

7.(a) Se Adams kap. 1.4, definition 4.
  (b) Se Adams kap. 1.4, sats 9 sid. 82.
  (c) Sätt $g(x) = f(x) - x$. Då är g också definierad i hela intervallet $[0, 1]$ och kontinuerlig där. Vidare är

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0,$$

och

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Eftersom $g(0) \geq 0$ och $g(1) \leq 0$ och g är kontinuerlig, så medför satsen om mellanliggande värden att det finns minst ett $x \in [0, 1]$ sådan att $g(x) = 0 \iff f(x) = x$, vilket vi skulle visa.