1) a) Med $z = a+bi$ ska alltså gälla: $a = 2b$, $\sqrt{a^2+b^2} = 5$

Detta ger $b^2 = 1$, dvs $b = \pm 1$.

Två lösningar: $a=2, b=1$ och $a=-2, b=-1$

Svar: $2+i$ och $2-i$

b) $f(x) = \sqrt{3+2\cos x}$ cos x antar alla värden i intervallet $[-1,1]$

Därmed antar $f(x)$ alla värden i intervallet $[3-2, 3+2] = [1,5]$.

Svar: Största värde $\sqrt{5}$, minsta värde 1

c) $u = (1,0,1)$. Enklast är att välja v vinkelrät mot u (skalärprodukt $=0$)

Triangelarean blir då $\frac{1}{2}|u|\cdot|v| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot|v|$

Därmed måste $|v| = \sqrt{2}$ för att arean ska bli 1.

Två exempel på v som fungerar är alltså $(0,\sqrt{2},0)$ och $(1,0,-1)$

(Samtliga lösningar bestäms av att $\frac{1}{2}|u\times v| = 1$, vilket med $v=(a,b,c)$ kommer att ge villkoret $(a-c)^2+2b^2=4$)

Svar: $(1,0,-1)$ (t.ex.)

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

z fri variabel.
$z=t \Rightarrow y = -1+t$, $x = 4-2t$

Svar: $\begin{cases} x = 4-2t \\ y = -1+t \\ z = t \end{cases}$

e) i) $\frac{\sin 4x}{\tan 5x} = \frac{\sin 4x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x = \frac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}\cdot\cos 5x \to \frac{4}{5}$ då $x\to 0$

iii) $\frac{\ln(x+3)}{\ln(x^2+1)} = \frac{\ln(x(1+\frac{3}{x}))}{\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))} = \frac{\ln x + \ln(1+\frac{3}{x})}{2\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^2})} \to \frac{1}{2}$ då $x\to\infty$ (förkorta med ln x)

Obs!

ii) $\frac{(x-1)^3 - x(x-2)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2-x-1}{x^2+2x+1} = \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \to 1$ då $x\to-\infty$

Svar: i) 4/5 ii) 1 iii) 1/2

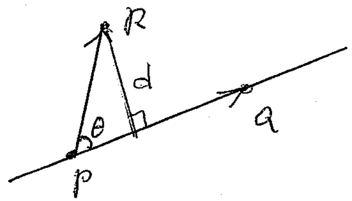
f) $\cos x + \sin f(x) = 1$

Derivera implicit:
$-\sin x + (\cos f(x))\cdot f'(x) = 0$
$x = \frac{\pi}{3}$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = 1$

Derivera igen:
$-\cos x - (\sin f(x))(f'(x))^2 + (\cos f(x))\cdot f''(x) = 0$
Sätt in $x = \pi/3$, $f(\pi/3) = \pi/6$, $f'(\pi/3) = 1$
$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{\ }$

Svar:
$f'(\frac{\pi}{3}) = 1$
$f''(\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

2)



$P = (-1,-1,2)$, $Q = (-1,-2,3)$ på linjen
$R = (2,0,-1)$ utanför.

$d = |\vec{PR}|\sin\theta = \frac{|\vec{PQ}|\cdot|\vec{PR}|\sin\theta}{|\vec{PQ}|} = \frac{|\vec{PQ}\times\vec{PR}|}{|\vec{PQ}|}$

$\vec{PQ} = (-1,-2,3)-(-1,-1,2) = (0,-1,1)$
$\vec{PR} = (2,0,-1)-(-1,-1,2) = (3,1,-3)$
$\vec{PQ}\times\vec{PR} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2,3,3) \Rightarrow d = \frac{|(2,3,3)|}{|(0,-1,1)|} = \frac{\sqrt{2^2+3^2+3^2}}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{11}$

Svar: Avståndet är $\sqrt{11}$

3) $f(x) = (x^2-2x+1)e^{-x} = (x-1)^2e^{-x}$ $f(x)\geq 0$, $f(1) = 0$ = minsta värde

$f'(x) = (2(x-1)-(x-1)^2)e^{-x} = (x-1)(2-(x-1))e^{-x} = (x-1)(3-x)e^{-x}$

x	$-\infty$		1		3		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	↘	0	↗	$4e^{-3}$	↘	0
			lok. min.		lok. max.		

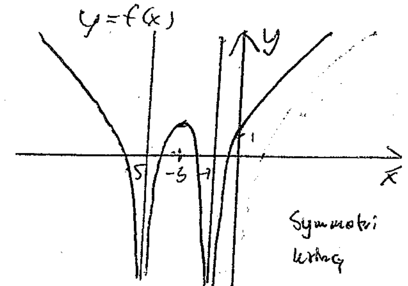
$\lim_{x\to\infty}(x-1)^2e^{-x} = 0$

Av tabellen framgår att $V_f = [0,\infty)$

4) $f(x) = \ln|x^2+6x+5| = \ln|(x+1)(x+5)|$ Def. för alla x utom -5 och -1.

$f'(x) = \frac{2(x+3)}{(x+5)(x+1)}$, nollställe $x=-3$

x	$-\infty$		-5		-3		-1		∞
$f'(x)$		$-$	{	$+$	0	$-$	{	$+$	
$f(x)$	∞	↘	ej def ($-\infty$)	↗	lok	↘	ej def. ($-\infty$)	↗	∞

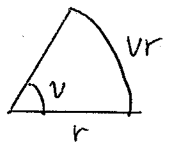


Symmetri kring $x=-3$

$f(x)\to-\infty$ då $x\to-5$ och $x\to-3$
(både från vänster och från höger)

Alltså är $x=-5$ och $x=-1$ asymptoter. Lok. max i $x=-3$

5)



Cirkelsektorns omkrets: $2r + vr$

— " — area: $\frac{v}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{vr^2}{2}$

Arean fixerad $= 1 \Rightarrow v = \frac{2}{r^2}$

Omkretsen blir då, som funktion av r:

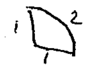
$f(r) = 2r + \frac{2}{r}$, skall minimeras!

$f'(r) = 2 - \frac{2}{r^2}$, nollställe $r = 1$

r	0		1		∞
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Omkretsen minimeras tydligen då $r = 1$, varvid $v = 2$

Omkretsen är då 4.



6) a) Falskt (ex. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ terrasspunkt)

b) Sant ($z + \bar{z} = a + bi + (a - bi) = 2a$, dvs $\mathrm{Im}(z + \bar{z}) = 0$)

c) Falskt (ex. $f(x) = \frac{-x}{|x|}$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$)

d) Sant (Riktningsvektor för linjen $(-3, 1, 2)$ är ortogonal mot normalvektor för planet $(1, 5, -1)$. Ta skalärprodukt!)

e) Falskt (Ex $f(x) = \frac{x}{|x|}$ är ej konstant, men $f'(x) = 0$ i hela D_f)

7) a) Adams

b) Adams

c) Ex. $f(x) = -|x - 3|$.