

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 22/1 .

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Ange absolutbelopp och ett argument för vart och ett av de komplexa talen $3 - 4i$ och $-7 + 3i$. (2p)

b) Ange alla reella x som uppfyller olikheten $(x + 2)(x^2 + x - 6) \geq 0$. (2p)

c) Beräkna $\sin \frac{\pi}{12}$. (2p)

d) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + 8z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

e) Ange följande gränsvärden: (3p)

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2 + x^4} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3 \ln x}{x + \ln x}$$

f) Låt $f(x) = x^3 + 2x$ och notera att f är en injektiv (one-to-one) funktion. Beräkna $(f^{-1})'(3)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Ange på normalform en ekvation för det plan som är parallellt med vektorerna $(-1, -1, -1)$ och $(2, 1, 1)$ och innehåller punkten $(2, -1, 0)$. (6p)

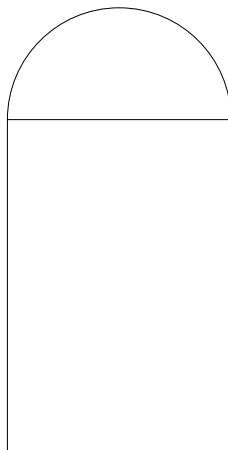
Ange också en ekvation för den räta linje som är vinkelrät mot planet och går genom punkten $(-2, 2, 3)$.

3. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 4x + 4}$ i intervallet $x \geq 0$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$. (6p)
Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

Var god vänd!

5. Ett tvådelat fönster består av en rektangulär klar glasskiva och en halvcirkelformad färgad glasskiva (se fig). (6p)



Det färgade glaset släpper in hälften så mycket ljus som det klara. Om hela fönstrets omkrets är given, bestäm rektangelsidornas proportioner så att ljusinsläppet blir maximalt.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)
- a) För alla komplexa tal z och w gäller att $|z + w| \geq |z| + |w|$.
 - b) $e^x > 1 + x$ för alla $x > 0$.
 - c) Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) > g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så gäller också att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.
 - d) Det finns minst ett reellt tal x sådan att $7x^{105} + 3x^{36} + 2x^{19} + 418 = 0$.
 - e) Om \mathbf{a}, \mathbf{b} och \mathbf{c} är tre vektorer i ett och samma plan så gäller att $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.
 - f) Om $f(0) = f''(0) = 0$ så måste också $f'(0) = 0$.
7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a . (6p)
- b) Formulera satsen om mellanliggande värde för kontinuerliga funktioner (Intermediate Value Theorem).
- c) Låt f vara en kontinuerlig funktion från det slutna intervallet $[0, 1]$ till sig självt. Bevisa att det måste finnas minst en punkt $x \in [0, 1]$ sådan att $f(x) = x$.
(TIPS : Betrakta $f(x) - x$).