MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik förM1, (TMV155)
Tid: 2007-08-29, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Anna Nyström
tel 0762- 721 860

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 29/8 em.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Ange alla komplexa tal z sådana att $\operatorname{Re}(z) = 2\operatorname{Im}(z)$ och $|z| = \sqrt{5}$. (2p)

   b) Ange största och minsta värde för funktionen $f(x) = \sqrt{(3 + 2\cos x)}$. (2p)

   c) Låt $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$. Ange en vektor $\boldsymbol{v}$ sådan att triangeln med $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som två av sina sidor har arean 1. (2p)

   d) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

   $$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

   e) Ange följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}$

   ii. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{(x-1)^3 - x(x-2)^2}{(x+1)^2}$

   iii. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x+3)}{\ln(x^2+1)}$

   f) Funktionen $f(x)$ ges implicit av ekvationen $\cos(x) + \sin(f(x)) = 1$ och $f(\pi/3) = \pi/6$. Ange $f'(\pi/3)$ och $f''(\pi/3)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm kortaste avståndet mellan punkten $(2,\ 0,\ -1)$ och linjen som går genom punkterna $(-1,\ -1,\ 2)$ och $(-1,\ -2,\ 3)$. (6p)

3. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln\left|x^2 + 6x + 5\right|$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.) (6p)

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

5. Bestäm radie och omkrets för den cirkelsektor (dvs "tårtbit") av area 1, som har minst omkrets. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om funktionen $f(x)$ är deriverbar på (a,b), $x_0 \in (a,b)$ och $f'(x_0) = 0$, så har f antingen att lokalt minimum eller ett lokalt maximum i x_0.

   b) För varje komplext tal z gäller att $\mathrm{Im}(z + \bar{z}) = 0$.

   c) Om $\lim_{x\to a-} f(x)$ och $\lim_{x\to a+} f(x)$ båda existerar, så gäller att $\lim_{x\to a-} f(x) \le \lim_{x\to a+} f(x)$.

   d) Linjen $(x,y,z) = (1-3t, 2+t, 2t)$ är parallell med planet $x+5y-z = 7$.

   e) För alla $x \in [-1,1]$ gäller att $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

   f) Om funktionen f och dess derivata är definierade för alla reella x utom $x = 0$ och om $f'(x) = 0$ för alla $x \in D_f$ så är f konstant.

7. a) Definiera begreppet: $f(x)$ har lokalt maximum i punkten x_0. (2p)

   b) Bevisa att om $f(x)$ är deriverbar i ett intervall (a,b) och har ett lokalt maximum i en punkt $x_0 \in (a,b)$ så är $f'(x_0) = 0$. (3p)

   c) Ge ett exempel på en funktion som inte är deriverbar för $x = 3$ och som har lokalt maximum för $x = 3$. (1p)

Lycka till!
/Carl-Henrik