MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2007-10-26, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Aron Lagerberg
tel 0762- 721 860

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor och SI hösten 2007 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast fredag 26/10 em.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Om $5\tan\theta = 6\cos\theta$, vilket/vilka är de möjliga värdena för $\sin\theta$? (2p)

   b) Lös olikheten $\frac{x^2-x}{x-3} \le 0$. (2p)

   c) Låt $f(x) = x + \arctan x$. Ange derivatan till f:s invers i punkten $1+\frac{\pi}{4}$ (dvs $(f^{-1})'(1+\frac{\pi}{4})$). (2p)

   d) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + 4y + 8z = 1 \end{cases}$$

   e) Ange följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x}$ iii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

   f) Funktionen $y = f(x)$ ges implicit av ekvationen $xy + e^{x+y} = 0$. Ange en stationär punkt (critical point) till funktionen och avgör om denna är en lokal extrempunkt. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1,2,3)$, $B = (-1,3,4)$, $C = (3,5,-1)$, $D = (1,-1,0)$, $E = (-3,-2,-1)$ vara punkter i rummet.

   a) Beräkna ekvationen till planet som innehåller A, B och C. (3p)

   b) Ange en ekvation till linjen genom D och E, och beräkna skärningspunkten mellan linjen och planet. (3p)

3. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2) - x$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konkavitet uppåt/nedåt behöver inte utredas.) (6p)

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

5. Bestäm parametern a så att avståndet mellan linjen $(x, y, z) = (1+at, 1-t, 4+t)$ och punkten $(2, 1, 3)$ blir så litet som möjligt. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) För alla vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ så gäller att $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$.

   b) För alla komplexa tal z gäller att $\mathrm{Re}(z^2) \geq 0$.

   c) Om $f''(x) > 0$ för alla x så måste f vara injektiv (dvs one-to-one).

   d) Om f är två gånger deriverbar och har ett lokalt maximum i $x = 0$, så måste gälla att $f''(0) < 0$.

   e) För alla $x > 0$ gäller att $\log_{10} x < x$.

   f) För alla reella tal a, b gäller att $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

7. a) Låt f vara en funktion som är definierad på ett öppet intervall (a, b). Vad betyder det att säga att f är växande? (2p)

   b) Visa att om $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$, så är f växande. (2p)

   c) Ge exempel på en deriverbar funktion som är växande på ett öppet intervall (a, b), men sådan att dess derivata inte är positiv för alla punkter i intervallet. (2p)

Lycka till!
/Lennart