MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2008-08-27, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Fredrik Lindgren tel 0762- 721 860

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor och SI hösten 2007 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (hösten 2007) webbsida tidigast onsdag 27/8 em.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Bestäm alla reella tal x som uppfyller olikheten $(1-x)(x^2+5x+6) \geq 0$. (2p)

   b) Skriv det komplexa talet $\dfrac{(1+i)^8}{4(1-i)}$ på formen $a+bi$. (2p)

   c) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} -x \quad\quad + z = 3 \\ -2x - y + 5z = -1 \\ 2x + y \quad\quad = 1 \end{cases}$$

   d) Beräkna exakta värdet av $\tan \frac{\pi}{8}$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3+x}}{(2x+1)\sqrt{x}}$ iii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}}$

   f) Funktionen (3p)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{då } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

   är inverterbar. Bestäm den inversa funktionen samt dess definitionsmängd och dess värdemängd.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Två räta linjer L_1 och L_2 skär varandra i punkten $(4, 0, -1)$. L_1 går dessutom genom punkten $(2, -2, -2)$, L_2 går genom punkten $(7, 0, -2)$. (6p)

   a) Ange ekvationer för de båda linjerna.

   b) En av linjerna skär planet $x - 2y + 2z = 1$. Bestäm skärningspunkten.

   c) Den andra linjen är parallell med nämnda plan. Vilket är (det minsta) avståndet mellan denna linje och planet?

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.) (6p)

4. Ange för varje värde på konstanten A antalet lösningar till ekvationen $Ae^x = 1 + x$. (6p)

5. För positiva x-värden kommer tangenten till kurvan $y = 1 - x^2$ att tillsammans med de positiva koordinataxlarna bilda en triangel. Bestäm den minsta area en sådan triangel kan ha. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om z är ett komplext tal så är $z\bar{z}$ reellt och ≥ 0.
   b) Om $f(x)$ är växande och $g(x)$ är avtagande så är $f(x) - g(x)$ växande.
   c) $|\sin x| \geq \sin|x|$ för alla reella tal x.
   d) Om $p(x)$ är ett polynom så är $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$.
   e) Det existerar en funktion $f(x)$ sådan att $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ och $f'(x) > 1$ för alla reella tal x.
   f) Om $f(x)$ är deriverbar, så är $\dfrac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)
   b) Formulera *medelvärdessatsen*. (2p)
   c) Att konstanta funktioner har derivata noll är en direkt följd av derivatans definition. Bevisa istället det omvända: om $f'(x) = 0$ för alla x i ett intervall I, så är f konstant på I. (2p)

Lycka till!
/Lennart