MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2008-08-27, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Fredrik Lindgren tel 0762- 721 860

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Bestäm alla reella tal x som uppfyller olikheten $(1-x)(x^2+5x+6) \geq 0$. (2p)

   b) Skriv det komplexa talet $\dfrac{(1+i)^8}{4(1-i)}$ på formen $a+bi$. (2p)

   c) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} -x \quad \quad + z = 3 \\ -2x - y + 5z = -1 \\ 2x + y \quad \quad = 1 \end{cases}$$

   d) Beräkna exakta värdet av $\tan \frac{\pi}{8}$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3+x}}{(2x+1)\sqrt{x}}$ iii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}}$

   f) Funktionen (3p)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{då } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

   är inverterbar. Bestäm den inversa funktionen samt dess definitionsmängd och dess värdemängd.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Två räta linjer L_1 och L_2 skär varandra i punkten $(4, 0, -1)$. L_1 går dessutom genom punkten $(2, -2, -2)$, L_2 går genom punkten $(7, 0, -2)$. (6p)

   a) Ange ekvationer för de båda linjerna.

   b) En av linjerna skär planet $x - 2y + 2z = 1$. Bestäm skärningspunkten.

   c) Den andra linjen är parallell med nämnda plan. Vilket är (det minsta) avståndet mellan denna linje och planet?

Var god vänd!

---

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.) (6p)

4. Ange för varje värde på konstanten A antalet lösningar till ekvationen $Ae^x = 1 + x$. (6p)

5. För positiva x-värden kommer tangenten till kurvan $y = 1 - x^2$ att tillsammans med de positiva koordinataxlarna bilda en triangel. Bestäm den minsta area en sådan triangel kan ha. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om z är ett komplext tal så är $z\bar{z}$ reellt och ≥ 0.

   b) Om $f(x)$ är växande och $g(x)$ är avtagande så är $f(x) - g(x)$ växande.

   c) $|\sin x| \geq \sin |x|$ för alla reella tal x.

   d) Om $p(x)$ är ett polynom så är $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$.

   e) Det existerar en funktion $f(x)$ sådan att $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ och $f'(x) > 1$ för alla reella tal x.

   f) Om $f(x)$ är deriverbar, så är $\dfrac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)

   b) Formulera *medelvärdessatsen*. (2p)

   c) Att konstanta funktioner har derivata noll är en direkt följd av derivatans definition. Bevisa istället det omvända: om $f'(x) = 0$ för alla x i ett intervall I, så är f konstant på I. (2p)

MATEMATIK
Chalmers

Lösningar

1.(a) $(1-x)(x^2+5x+6) = (1-x)(x+2)(x+3)$. Produkten är icke-negativ om och endast om antingen alla tre faktorerna eller precis en av dem är det. Det första alternativet inträffar då $-2 \leq x \leq 1$ och det andra då $x \leq -3$.

Svar : $(-\infty, -3] \cup [-2, 1]$.

(b) Först notera att $(1+i)^2 = 2i$. Därför är $(1+i)^8 = (2i)^4 = 16$. Därmed är

$$\frac{(1+i)^8}{4(1-i)} = \frac{16}{4(1-i)} = \frac{4}{1-i} = \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4(1+i)}{2} = 2(1+i).$$

(c) Efter Gausselimination reduceras systemet till diagonalformen

$$-x+z=3, \quad -y+3z=-7, \quad 5z=0.$$

Återsubstitution ger den entydiga lösningen $x=-3, y=7, z=0$.

(d) Man ska veta att $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Då utnyttjar man dubbleringsformeln

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.$$

Låt $x := \tan\theta$ och tag $\theta = \frac{\pi}{8}$ ovan så får vi att

$$1 = \frac{2x}{1-x^2}.$$

Denna kvadratiska ekvation har lösningarna $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Eftersom $\tan\frac{\pi}{8} > 0$ så måste därför $\tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$.

(e) För **(i)** skriver vi

$$\frac{\sin(2x^2)}{x^2} = 2\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}.$$

Då $x \to 0$ så går kvotet mot 1. Svaret är därför 2.

För **(ii)** konstaterar vi att den högsta potensen av x både upp och ner är $x^{3/2}$, och att

$$\frac{\sqrt{x^3+x}}{(2x+1)\sqrt{x}} = \frac{x^{3/2}\sqrt{1+1/x^2}}{x^{3/2}(2+1/x^2)} = \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{2+1/x^2}.$$

Då $x \to \infty$ så går täljaren mot 1 och nämnaren mot 2, så svaret är $1/2$.

För **(iii)** Då $x \to 0$ så går $-1/|x|$ mot $-\infty$ och $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$. Så svaret är noll.

(f) $y = x - 1 \Rightarrow x = y - 1$ och $y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$. Här är det den positiva roten som gäller för inversen ska också vara ett-till-ett. Den explicita formeln för inversen är alltså

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{då } x \geq 1, \\ x - 1, & \text{då } x < 1. \end{cases}$$

Både definitions- och värdemängden för f^{-1} är hela $\mathbb{R}$.

2. (a) Riktningen för L_1 ges av $\boldsymbol{v}_1 = (2, -2, -2) - (4, 0, -1) = (-2, -2, -1)$. Riktningen för L_2 ges av $\boldsymbol{v}_2 = (7, 0, -2) - (4, 0, -1) = (3, 0, -1)$. Linjerna ges därmed i skalärparameterform av

$$L_1 = \{(4 - 2t, -2t, -1 - t) : t \in \mathbb{R}\},$$
$$L_2 = \{(4 + 3t, 0, -1 - t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) $\boldsymbol{n} = (1, -2, 2)$ är en normal till planet. Notera att $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ så det är L_1 som är parallell med planet. För L_2 däremot beräknar vi skärningspunkten enligt

$$(4 + 3t) - 2(0) + 2(-1 - t) = 1 \Rightarrow t = -1,$$

som ger skärningspunkten $(1, 0, 0)$.

(c) Vi kan använda formeln för avståndet mellan en punkt och ett plan :

$$s = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Här är $A = 1$, $B = -2$ och $C = 2$. För (x_0, y_0, z_0) kan vi ta en godtycklig punkt på L_1, t.ex. $(4, 0, -1)$. Insättning och uträkning leder till att avståndent mellan L_1 och planet är $1/3$.

3. Notera först att $f(-x) = -f(x)$, dvs f är udda, som innebär att grafen blir symmetrisk kring origo. Polynomdivision ger att

$$\frac{x^3}{x^2 - 3} = x + \frac{3x}{x^2 - 3},$$

från vilket vi ser att linjen $y = x$ är en sned asymptot - $\pm\infty$.
(Alternativt använder vi den generellare metoden: $f(x)/x \to 1 = k$, då $x \to \pm\infty$, och $f(x) - kx = f(x) - x \to 0 = m$ då $x \to \pm\infty$).

Det finns lodräta asymptoter i $x = \pm\sqrt{3}$ och man kollar att

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty.$$

För att ta reda på hur $f(x)$ varierar och var eventuella extrempunkter finns, deriverar vi (kvotregeln):

$$f'(x) = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x+\sqrt{3})^2(x-\sqrt{3})^2},$$

så de kritiska punkterna är $x = 0$ och $x = \pm 3$. För att få översikt gör vi en värdetabell för $x \geq 0$ (utnyttja den udda symmetrin för $x < 0$!):

x	0	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x < 3$	3	$3 < x < \infty$	∞
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty/+\infty$	$\searrow$	$4,5$	$\nearrow$	$+\infty$

Vi har tydligen ett lokalt minimum i $x = 3$, pga den udda symmetrin ett lokalt maximum i $x = -3$, medan $x = 0$ utgör en terrasspunkt.
En figur kan komma att läggas in här senare (när jag får tid och inte måste rätta). Den kan i alla fall ritas med tabellen som anvisning, plus det faktum att f är en udda funktion. Kom också ihåg att grafen ska smita intill asymptoten $y = x$ för stora värden på $|x|$!

4. För utseendet av grafen till e^x, kolla Fig. 3.13 i Adams. Grafen till Ae^x har samma utseende då $A > 0$, ser ut som en spegling av densamma i y-axeln då $A < 0$ och är en vågrät linje då $A = 0$. I de två sista fallen är det uppenbart att det blir exakt en skärningspunkt med linjen $y = 1 + x$. I det första fallet, dvs då $A > 0$, kan antalet skärningspunkter vara 0,1 eller 2. Linjen har lutning $+1$ så det som är avgörande är var Ae^x har lutning $+1$. Derivatan av Ae^x är sig själv, så lutningen är $+1$ där $Ae^x = 1 \Rightarrow x = -\ln A$. Motsvarande punkt på kurvan är $(-\ln A, 1)$ och motsvarande punkt på linjen är $(-\ln A, 1 - \ln A)$. Det blir 0,1 resp. 2 skärningspunkter om och endast om linjen ligger under, tangent till resp. över kurvan i dessa punkter, dvs om och endast om $1 - \ln A$ är < 0, $= 0$ resp. > 0. Men $1 - \ln A < 0 \Leftrightarrow A > 1$ o.s.v.

   SVAR : En lösning då $A \leq 0$ eller $A = 1$, två lösningar då $0 < A < 1$, och inga lösningar då $A > 1$.

   Alternativ lösningsmetod: Bilda funktionen $f(x) = \frac{1+x}{e^x} = (1+x)e^{-x}$. En lösning till vår ekvation blir då en punkt där $f(x) = A$. Rita grafen (med stöd av derivatan), så ser du hur många skärningspunkter den har med linjen $y = A$ för olika värden på A.

5. Om $y = 1 - x^2$ så är $dy/dx = -2x$. I punkten $(a, 1 - a^2)$ har därför tangenten till kurvan en lutning på $-2a$. Ekvationen till denna tangent är alltså

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a) \Rightarrow 2ax + y = a^2 + 1.$$

Skärningspunkterna med x- och y-axlarna är resp. $\left(\frac{a^2+1}{2a}, 0\right)$ och $(0, a^2+1)$. Arean av den bildade triangeln är

$$\frac{1}{2} \times \text{Bas} \times \text{Höjd} = \frac{(a^2+1)^2}{4a}.$$

Det är denna funktion av a som vi vill minimera. Kalla den för $f(a)$. Derivering med kvotregeln leder till att

$$f'(a) = \frac{(a^2+1)(3a^2-1)}{4a^2}.$$

Så derivatan är noll då $a = \pm 1/\sqrt{3}$. Vi är bara intresserade av positiva värden så vi tar $a = 1/\sqrt{3}$. Den minsta möjliga arean av triangeln är alltså $f(1/\sqrt{3}) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

6.(a) Sant. $z\overline{z} = |z|^2$.

(b) Sant.

(c) Sant. Hänger på att $\sin(-x) = -\sin x$.

(d) Sant. Alla polynom är kontinuerliga.

(e) Falskt. Om $f'(x) > 1$ för alla reella x så medför det att $f(x) - f(x-2) > 2$ för alla x (ett stringent bevis av detta använder medelvärdessatsen). Väljer vi $x = 1$ så har vi alltså att $f(3) - f(1) > 2$, som säger emot de givna värdena.

(f) Falskt. Derivering enligt kedjeregeln ger i stället att

$$\frac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

7.(a)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

(b) Om $f(x)$ är deriverbar i det öppna intervallet (a, b) och kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ så innebär det att det finns minst en punkt $c \in (a, b)$ sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

(c) Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in I$ så härleder vi lätt från (1) att $f(b) = f(a)$ för alla $a, b \in I$, v.s.v.