MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156).
Tid: 2008-10-24, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Urban Larsson tel 0762- 721 860

---

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor hösten 2008 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast fredag 24/10 em.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. Endast svaren rättas!

   a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - 5y + 7z = 1 \end{cases}$$

   b) Lös ekvationen $z^4 = -1$ fullständigt. (3p)

   c) I vilket eller vilka intervall $x$ är funktionen $f(x) = xe^{-x}$ konkav (=concave down)? (2p)

   d) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

i. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \ln x + x^3}{(\ln x)^6 + 2x^3}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$ iii. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+5x)^{4/x}$

   e) Funktionen $f(x) = x + \log_2 x$ är injektiv då $x > 0$. Låt $g(x)$ vara dess invers. Beräkna $g'(3)$. (Deriveringsregel: $\frac{d}{dx}\log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}$). (2p)

   f) I en rätvinklig triangel ökar kateternas längder med hastigheterna 3 m/s respektive 4 m/s. Hur snabbt växer triangelns area i det ögonblick då kateterna är 3 m resp. 4 m långa? (2p)

**Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar**.

2. Givet är de tre punkterna $A = (1,1,1)$, $B = (7,3,-2)$ och $C = (4,9,-4)$. Låt $L$ vara linjen genom $A$ och $B$. Låt $P$ vara planet som innehåller $A, B$ och $C$. Låt $Q$ vara planet $x - y - 2z = -12$. (6p)

   a) Ange en ekvation för $L$.

   b) Ange en ekvation för $P$.

   c) Beräkna skärningspunkten mellan $L$ och $Q$.

**Var god vänd!**

---

3. Ange det största och det minsta värdet som antas av funktionen $f(x) = e^{-x^2}(x + \frac{1}{2})$ på intervallet $[0, 10]$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x-2}$. (6p)
   Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
   (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är $L$, då $x$ närmar sig $a$; d v s definiera $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim\limits_{x \to 1}(3x + 1) = 4$. (2p)

   c) Bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$ och bevisa ditt påstående med den i a) just givna definitionen. (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) För varje komplext tal $z$ gäller att $|z| = |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

   b) Om ett linjärt ekvationssystem har fler ekvationer än obekanta så kan systemet inte ha entydig lösning.

   c) Olikheten $e^x \geq x + 1$ är sann för alla reella tal $x$.

   d) Låt $\boldsymbol{u}$ vara en vektor i rummet. Om $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ så måste $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

   e) Om $f(x)$ är definierad i hela $\mathbb{R}$ och deriverbar, och har 2008 olika nollställen, så har ekvationen $f'(x) = 0$ fler än 1000 lösningar.

   f) Om $f \circ f$ är en injektiv (one-to-one) funktion, så måste $f$ själv vara injektiv.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion $f$ i en punkt $x$. (2p)

   b) Bevisa att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$. Du behöver inte bevisa eventuella hjälpsatser om trigonometri eller gränsvärden. (4p)

VA