TMV156/TMV155E Inledande matematik E, 2009

DATORÖVNING 1 — FUNKTIONER - I DUBBEL MENING

1. Instruktioner

Välj plottningsintervall och skalor på x, y-axlarna så att figuren blir bra. Se sidan 26–27 i Adams. Vissa funktioner har parametrar, $a, b, c, \ldots$. Plotta då i en figur flera grafer med lämpligt valda parametervärden.

Använd "label", "title", "legend", olika färg och linjetyp så att figuren blir informativ.

Skapa en ny filkatalog ("directory") `Lab1` för denna övning. Gör alltid uppgifterna i script-filer. För rituppgifterna, arbeta med script-filer som innehåller kommandon av typen:

```
A=0; B=1;
x=linspace(A,B);
f=@(x)...
g=@(x)...
y1=f(x);
y2=g(x);
plot(x, y1, x, y2)
legend('y=f(x)', 'y=g(x)')
```

Spara gärna någon figur i MATLABs eget format `.fig` så att du kan öppna den igen. Testa också att spara den till i `.eps` format ("encapsulated postscript") eller `.png` så att du kan importera den till något ordbehandlingsprogram. Notera att det går att exportera till många olika format. På så sätt kan man även manipulera figurer i rit- eller bildbehandlingsprogram om man vill.

De delar av den här laborationen som handlar om grafritning är en varsam modifikation av en laboration på motsvarande kurs på Maskin som utvecklats av Stig Larsson.

2. Uppgifter

2.1. Några rituppgifter.

2.1.1. *Olika funktioner.* Plotta följande funktioner på intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Använd olika linjefärger och "legend" så man ser vilken graf som hör till vilken figur.

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \\
y &= \tan(x) \\
y &= \cot(x) \\
y &= \ln(|x|) \\
y &= \exp(x)
\end{aligned}
$$

För flera matematiska funktioner, skriv

```
help elfun.
```

2.1.2. *Komplexa tal ger problem.* Rita grafen till funktionen $y = \sqrt{x}$ med definitionsområdet $-3 \leq x \leq 3$. Läs varningen som skrivs ut i kommandofönstret. Skriv sedan

```
figure(2)
plot(y,'*') %Eller möjligen plot(y,'*-r')
```

i din skriptfil. Vad visar denna plot? Här finns tydligen anledning att vara vaksam! Zooma slutligen in origo i denna plot genom att skriva

```
axes([-.5 .5 -.1 .5]).
```

Vad gör kommandot "axes"?

Date: 2009–10–05, Fredrik Lindgren, Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola.

2.1.3. *Några rationella funktioner.* (A) Plotta grafen till funktionen

$$y = \frac{1}{x}$$

på ett område runt origo. Plotta också den lodräta asymptoten med en annan linjetyp.

(B) På räkneövningen den 2/10 skissade vi funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}.$$

Vi visade att den har singulariteter i $x = -1$ och $x = 1$ samt en inflektionspunkt i $x = 0$. Dessutom beter den sig som $y = x$ då $x \to \infty$. Rita funktionen genom att plotta den i tre steg. Först på intervallet $[-K, -1)$, sedan på $(-1, 1)$ och slutligen på $(1, K]$ där K är något lämpligt tal som är större än 2. Markera sedan inflektionspunkten med en cirkel. Slutligen plottar du de lodräta asymptoterna och grafen av $y = x$ med en annan linjetyp än funktionsgrafen. Sätt ut namn på linjerna med ”legend”, titel på figuren med ”label” samt namn på axlarna med ”xlabel” och ”ylabel”.

2.1.4. *Translation och skalning.* (A) Antag att vi har en funktion $f(x)$. Vi har sett att grafen av $f(x-b)$ ligger b steg till höger om grafen till $f(x)$. Dessutom har vi sett att grafen av $f(ax)$, $a > 0$ är en version av grafen som är ihoptryckt så att ”bredden” i någon mening är $1/a$. För övrigt så gäller att $Af(x)$, $A > 0$ gör grafen A gånger så hög. Ett särkilt intressant fall (i synnerhet för en elektroingenjör) är funktionen

$$y = A\sin(k(x-a)) \quad (A > 0,\ k > 0)$$

Vad kallas A, a och k? (Adams sid 207) Variera en parameter i taget och plotta de olika grafer du får i tre olika fönster i samma figur med hjälp av ”subplot”. Se till att parametern antar ett värde som är mindre än 1, ett som är större och att den också antar värdet 1. Studera noggrant de fenomen som beskrivs ovan. Gör titlar etc. som i uppgiften ovan.
(B) Gör om det hela för funktionen $g(x) = \exp(-x^2)$. Den här funktionen spelar en alldeles särskild roll i sannolikhetsteorin med det speciella valet $A = k/\sqrt{\pi}$. Här kallas talet a för medelvärdet och $\frac{1}{\sqrt{2}k}$ är standardavvikelsen. Grafen är den berömda normalfördelningskurvan. Ni borde alltså kunna återskapa bilden på

`http://sv.wikipedia.org/wiki/Fil:Normal_distribution_pdf.png.`

Läs alltid Wikipedia-artiklar med kritiska ögon, men läs dem gärna. Det finns förvånasnvärt mycket om matematik och teknik!

2.2. **Funktioner och funktionsanrop.** De här uppgifterna är tänkta att ge träning hur man skriver funktionsfiler och hur man tolkar hjälptexten i Matlabs färdiga sådana samt använder dessa. Man bör när man läser hjälptexten fråga sig vad filen kräver för inargument och vad de returnerar. Matlabs hjälptester är ofta strukturerade så att det enklaste sättet att använda funktionen beskrivs först och sedan beskrivs mer komplicerade tillvägagångssätt. Som nybörjare är således ofta det första stycket i hjälptexten det viktigaste.

En viktig poäng är att de filer du skriver själv och de som finns färdiga fungerar på samma sätt. I allmänhet är Matlabs färdiga filer naturligtvis en aningens mer raffinerade än de vi skriver här. Ta en titt på någon, till exempel ”fminsearch.m” genom att skriva

```
edit fminsearch
```

i kommandofönstret.

För övrigt introducerar vi en del viktiga funktioner nedan. Lägg dessa på minnet!

2.2.1. *Absolutbelopp.* Programutdraget nedan räknar ut $f(x) = |x|$ genom att testa om talet x är negativt eller positivt. Skriv utifrån detta en *funktionsfil* med namnet ”absolut.m” som tar emot ett tal x och returnerar dess absolutbelopp.

```
if x>=0
   z=x;
else
   z=-x;
end
```

2.2.2. *Enkel funktionsfil med två inargument och ett utargument.* Skriv en funktionsfil med namnet "exponent.m" som tar emot två tal, x och y och returnerar talet $z = x^y$.

2.2.3. *Fler invariabler och flera utvariabler.* Skriv en funktionsfil element.m som utför elementvis addition, subtraktion, multiplikation och division mellan två vektorer och returnerar alla dessa svar i olika utvariabler. Anropa dessa med vektorerna $x = [1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10]$ samt $y = [2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11]$ och plotta alla resultaten mot vektorindex i samma figur. Deklarera x, y i en skriptfil från vilken anropet av element.m och plot görs. Hur gör du om du bara är intresserad av summan och differensen?

2.2.4. *Matlabfunktion med en eller två utvariabler.* Ett primitivt sätt att hitta minimum och maximum för en funktion är att generera en vektor med värden på det intervall $[a, b]$ man är intresserad av att studera med tillräckligt hög upplösning genom att skriva

```
x=a:dx:b;
```

där dx är ett tillräckligt litet tal och sedan beräkna funktionsvärdena

```
y=f(x)
```

där f är ett funktionshandtag och sedan låta funktionerna "max" och "min" hitta det största respektive minsta värdet. Detta görs helt enkelt genom kommandot

```
minimmum=min(y)
```

och analogt för att hitta maximum. Då får du docka bara veta vad det minsta (största) värdet är och inte var det antas. Det kan du däremot göra om du beodrar min att returnera två variabler genom kommandoraden

```
[minimum,ind]=min(y).
```

Läs igenom hjälptexten för någon av dessa funktioner och fundera ut hur du nu får reda på vilket x-värde som ger detta minima/maxima.

2.2.5. *Anrop av färdiga funktioner, hitta rötter till polynom.* Att analytiskt hitta rötter till polynom av högre grad än två är svårt. Matlab har en färdig funktion för att göra detta numeriskt. Den heter "roots.m". Läs igenom hjälpfilen och försök hitta rötterna till polynomet

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Testa att skriva ut värdet på rötterna med full noggrannhet genom att skriva

```
format long
```

innan du anropar funktionen. Rötterna är $1, 2$ och 3. Hur stort är felet? Försök samma sak med polynomet

$$q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Den som kan sin Pascals triangel ser att detta polynom har en trippelrot i $x = 1$. Hur stort är felet här? Det är ett allmänt fenomen att det är svårare att hitta multipla rötter än enkla. Plotta polynomens grafer och fundera över varför det kan vara så! För att få polynomvärdena, använd funktionen polyval!

2.2.6. *Anrop av färdiga funktioner, nollställen till generella funktioner.* Funktionen "roots" ovan hittar bara nollställen till polynom. För att lösa $f(x) = 0$ för en mer generell funktion f så används "fzero". Läs igenom hjälpfilen och använd funktionen på polynomen i föregående uppgift. Jämför lösningarna. Det finns minst en viktig skillnad! Försök också med (den matematiska) funktionen $g(x) = (x^2 - 1)\exp(x)$. Var har g sina nollställen?

2.2.7. *Anrop av färdiga funktioner, min- och maxvärden.* I matlab finns två standardlösare för att minimera funktioner, ”fminsearch” och ”fminbnd”. Dessutom finns massa specialgrejer i ”Optimization Toolbox”. Vad är skillnaden mellan ovan nämda funktioner? Testa båda på funktionen $g(x)$ i uppgiften ovan. Funktionen $\tilde{g} = g(x) * (x^2 - 4)$ har flera lokala minima. Plotta funktionen och välj gränser respektive startvärde så att du hittar alla! Det krävs alltså en sökning per lokalt minimum.

Hur gör man för att hitta ett maximum med hjälp av dessa Matlab-funktioner?

2.2.8. *Mera optimering.* Från otimeringsgruppen hälsar man att funktionen

$$f(x) = -\exp(0,01x)(1 + \sin(x))$$

är någonting att bita i. Försök hitta det globala maximat på $\mathbb{R}^+$!

2.2.9. *Lurad av grafen?* Plotta funktionen $f(x) = (x\ln(x) + 3\sin(x) + 7x)/\sqrt{x}$ först på intervallet $[0, 1]$ och sedan på $[0, 5 \cdot 10^{-5}]$. I den första plotten missar man tydligen ett globalt minimum. Försök hitta det med optimeringsfunktionerna från föregående övning. Svårt, eller hur?! Testa med $g(x) = 1000f(x/1000)$. Kan du med hjälp av lösningen till det problemet räkna ut ungefär vad lösningen är till det första?

2.3. **Mer uppgifter av olika sorter.**

2.3.1. *Monom.* Monom är de enkla funktioner som bygger upp polynom. Plotta några stycken i samma figur över definitionsområdet $[-2, 2]$. Notera beteendet i delintervallen $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ respektive $[1, 2]$.

$$y = x^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

2.3.2. *Några fler rationella funktioner.* Tänk på var (om) dessa funktioner har lodräta asymptoter. Se till att du förstår varför de har/inte har några.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x} \\
y &= \frac{1}{x-a} \\
y &= \frac{2-x}{x-1} \\
y &= \frac{1}{x^2} \\
y &= \frac{a}{x^2+a} \qquad (a > 0)
\end{aligned}$$

2.3.3. *Kvadratrot.*

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x} \\
y &= b + \sqrt{x-a} \\
y &= \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

2.3.4. *Potensfunktion.* Plotta dessa funktioner i samma figur som monomen ovan, tänk på definitionsmängden!

$$y = x^a \quad (a = 0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{3}{2},)$$

2.3.5. *Sortera i storleksordning.* Antag att vi i ett experiment mäter två variabler x och y vid olika tillfällen så vi får en mängd parvis mätvärden (x_i, y_i) och vi tror att det finns ett samband $y_i = f(x_i)$ där f är en okänd funktion. Vi skulle kunna simulera detta genom att slumpa några x-värden och låta den "okända" funktionen vara en sinusfunktion mätt med lite brus.

```
epsilon=1e-3;
x=randn(1,100);
y=sin(x)+epsilon*randn(size(x));
figure(1)
plot(x,y)
figure(2)
plot(x,y,'*')
```

Den andra figuren blir väl okej men vill vi ha en hel graf så kan det vara en god idé att sortera x-värdena i storleksordning. Men då måste vi sortera om y-värdena på samma sätt. Vi sorterar x-värdena med kommandoraden

```
[x_ny,Index]=sort(x);.
```

Det gäller nu att $x\_ny = x(Index)$. Hur sorterar vi nu y-värdena så att rätt x_ny-värde hamnar med rätt y_ny-värde (help sort)?

2.3.6. *Fixpunktsiteration.* Blir du klar har du något att bita i på följande webadress:
`http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv225/0910/studio/studio4.pdf`