Matematik Chalmers

Tentamen i TMV156 Inledande matematik E, 2010–08–25, fm V

Telefon: Ida Säfström, 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Tentamen omfattar 50 poäng. Maximal poäng för varje uppgift ges i marginalen. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–. (Bonuspoäng från hösten 2009 läggs till tentamensresultatet.)

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Till denna uppgift skall **endast svar lämnas in,** alltså utan motiveringar.
(a) Beräkna $|z|$ om $z = \cos(5\pi/12) + i\sin(5\pi/12)$. **(2p)**

(b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ -x + z = -4 \end{cases}$. **(2p)**

(c) För vilka funktioner f som är definerade på $\mathbb{R}$ gäller det att $f'(x) = 0$ för alla x? **(2p)**
(d) Bestäm samtliga asymptoter till $f(x) = x + \frac{1}{x}$. **(2p)**
(e) Låt $f(x) = \sin(x^2)/x$. Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{i.}\quad \lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \text{ii.}\quad \lim_{x\to\infty} f'(x) \qquad \text{iii.}\quad \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2}{\ln(1+x)}$$

(3p)
(f) För vilka x gäller olikheten $|x-1| \geq |x-5|$? **(2p)**

Till uppgifterna 2-5 skall fullständiga lösningar lämnas in.

2.(a) Ange alla vektorer i planet som är vinkelräta mot (a, b), där (a, b) ej är nollvektorn. **(1p)**
(b) Låt L vara skärningslinjen mellan planen med ekvationerna $x + 2y + z = 4$ och $2x + 4y - 3z = 13$. Bestäm L på parameterform. Du får svara antingen på vektorform eller komponent för komponent. **(3p)**
(c) Beräkna volymen av parallellepipeden med hörn i $(2, 4, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(-1, 0, 1)$ och i origo. **(3p)**

3. (a) Låt $a > 0$ vara en konstant och $f(x) = 1/x - ax$. Vad är det minsta värdet f antar på intervallet $(0, 1]$? **(3p)**
(b) Vilket är det största värdet a kan anta så att funktionen $g(x) = x\ln x - ax^3/6$ är konvex på intervallet $(0, 1]$? **(3p)**

4. Skissa grafen av funktionen

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}.$$

Ange lokala extrempunkter och asymptoter. **(6p)**

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$. **(3p)**

b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x\to 1}(3x+1) = 4$. **(2p)**

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivering krävs ej. Rätt svar ger 1 poäng, inget svar 0 poäng och fel svar -1 poäng. Dock är 0 minsta möjliga poäng totalt. **(6p)**

(a) Om f är en strängt växande funktion så är inversen f^{-1} strängt avtagande.
(b) Det finns en invers till $f(x) = \sin(x)$ på varje intervall av längd mindre än 2π.
(c) Ett tredjegradspolynom med reella koefficienter har alltid minst en reell rot.
(d) En av logaritmlagarna lyder $(\ln a)^b = b \ln a$.
(e) Påståendet $\lim_{x\to a} f(x) = L$ måste vara falskt om följande gäller: För varje $\delta > 0$ finns x så att $|x - a| < \delta$ och $|f(x) - L| > 1$.
(f) Om f är en konvex funktion så är f växande.

7. (a) Definera kontinuitet för en funktion i en punkt. Definera även derivatan av en funktion i en punkt. **(2p)**
(b) Visa att deriverbarhet medför kontinuitet. **(2p)**
(c) Förklara/bevisa med hjälp av medelvärdessatsen att en funktion med positiv derivata är växande. Kom ihåg: Att f är växande innebär att $f(b) \geq f(a)$ om $b \geq a$. **(3p)**

VA