

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor och SI hösten 2010 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast måndag 25/10.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv56/1011/

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) För vilka reella tal är $\frac{x-5}{3-x} \geq 0$? (2p)

b) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y + 7z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases}$$
 (2p)

c) Bestäm samtliga asymptoter till $y = 2x - 3 + \frac{1-x}{(x-3)^2}$. (2p)

d) En ballonguppstigning betrakats 100 m från startplatsen (marken är plan och horisontell). När ballongens riktning är $\frac{\pi}{4}$ radianer över horisontalplanet uppmäter man att vinkeln ändras med 0,025 rad/s. Beräkna ballongens fart i detta läge. (2p)

e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + (\ln x)^{10}}{x + 3e^x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + \sin x}{2x + \sin x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x}$$

f) Funktionen $f(x) = \cos x$ med definitionsmängden $\mathcal{D}(f) = [\pi, 2\pi]$ är (strängt) växande och därmed inverterbar. Inversen f^{-1} är inte arccos, men kan uttryckas med hjälp av arccos. Gör det! (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm i parameterform skärningslinjen mellan planen $x - y + z = 2$ och $2x - y + 2z = 3$. (2p)

b) Beräkna avståndet mellan punkten $(4, 2, 6)$ och planet $2x - y + 2z = 3$. (2p)

c) Vilken punkt i planet $2x - y + 2z = 3$ är närmast punkten $(4, 2, 6)$? (2p)

3. Skissera grafen av funktionen (6p)

$$f(x) = (x-2)^2 e^{4-x} + 1$$

Ange asymptoter och lokala extrempunkter, ange också i vilka intervall funktionen är konvex (concave up) respektive konkav (concave down).

Var god vänd!

4. Betrakta funktionen (6p)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \ln|x| & \text{då } x \leq -1 \\ 4x + \cos(\pi x) & \text{då } -1 < x < 1 \\ xe^{1-x} - 6 & \text{då } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Undersök i vilka intervall f är växande respektive avtagande.
- b) Förklara varför f är inverterbar.
- c) Beräkna $(f^{-1})'(1)$ (obs: derivatan).
5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L , då x närmar sig a ; d v s definiera $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. (2p)
- b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. (4p)
6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

a) $e^{i\frac{93\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

- b) Ekvationen $z^9 = -1$ har fyra rötter med positiv realdel.
- c) Ekvationen $\sin x + 2 \sin 3x + 3 \sin 5x = 7$ har oändligt många lösningar.
- d) Om $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ existerar, så måste också $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existera.
- e) För vektorer \mathbf{a} och \mathbf{b} i rummet är alltid $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$
- f) Om f har andraderivata för alla x och om $f(0) = f(1) = f(2)$, så måste det finnas minst en punkt $c \in (0, 2)$ sådan att $f''(c) = 0$

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x . (2p)
- b) Bevisa att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$. Du behöver inte bevisa eventuella hjälpsatser om trigonometri eller gränsvärden. (4p)