Inledande matematik E, tmv156, 110115

1\) a) $\frac{x^2(x-3)}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} < 0 \Leftrightarrow$

x		2		3	
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x-3/x-2$	$+$	∄	$-$	0	$+$

$\Leftrightarrow 2 < x < 3$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ ingen lösn. ty sista ekv. ger $0 = 0x + 0y + 0z = 1$

c) Sätt $z^2 = x \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm i$

Lös nu binomiska ekv. $z^2 = x_{1,2}$ genom ansättning $z = re^{i\theta} \Rightarrow r^2 e^{i2\theta} = z^2 = 1 \pm i = \sqrt{2} e^{\pm \pi/4}$

$\Rightarrow r^2 = \sqrt{2}$, $2\theta = \pm\frac{\pi}{4} + n2\pi \Rightarrow r = 2^{1/4}$, $\theta = \pm\frac{\pi}{8} + n\pi \Rightarrow z = 2^{1/4} e^{(\pm\pi/8 + n\pi)}$, $n = 0, 1$

d) $f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$ Nu gäller $e^4 = e^{x^2} = f(x)$ och $x \geq 0 \Rightarrow x = 2$ Vidare $f'(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f'(2) = 4e^4 \therefore (f^{-1})'(e^4) = 1/4e^4$

e) α) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = -1$ β) $\lim_{x\to 0^+} x^{-\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^{-\ln x})} = \lim_{x\to 0^+} e^{-(\ln x)^2} = 0$ γ) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \text{'}\frac{0}{0}\text{'} = (\text{l'Hop.}) = \lim_{x\to 1} \frac{\pi \cos \pi x}{1} = -\pi$

f) Parametrisering av enhetscirkeln moturs ges med $a \geq 0$ av $c(t) = (\cos at, \sin at)$ = som är partikelns läge vid tiden t; $c'(t) = (-a\sin at, a\cos at) \Rightarrow 2 = |c'(t)| = \sqrt{(-a\sin at)^2 + (a\cos at)^2} = \sqrt{a^2 \cdot 1} = |a| = a$ i.e. $c(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ Låt $d(t)$ = avståndet mellan partikelns läge och punkten $(1,0) = |c(t) - (1,0)| = \sqrt{(\cos(2t)-1)^2 + (\sin(2t)-0)^2} = \sqrt{\cos^2 2t - 2\cos 2t + 1 + \sin^2 2t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos(2t)} \Rightarrow d'(t) = \sqrt{2}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\cos(2t)}} \cdot \sin 2t \cdot 2 = \frac{\sqrt{2}\sin(2t)}{\sqrt{1-\cos(2t)}} \Rightarrow d(\frac{\pi}{8}) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och $d'(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

2\) a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,3,1) - (1,1,1) = (1,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = \dots = (2,0,1) \Rightarrow n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,-4) \Rightarrow$ planets ekv. $0 = 2(x-1) - (y-1) - 4(z-1) \Leftrightarrow 2x - y - 4z = -3$

b) d = avståndet $= |\text{Proj}_n \overrightarrow{P_0D}| = \left|\left(\overrightarrow{P_0D} \cdot \frac{n}{|n|}\right)\frac{n}{|n|}\right| = \frac{|\overrightarrow{P_0D} \cdot n|}{|n|} = \frac{|-1-4|}{\sqrt{21}} = 5/\sqrt{21}$ där n är planets normal $P_0 = t e_1 = (-1,1,0)$ är en punkt i planet $\Rightarrow \overrightarrow{P_0D} = (0,1,1)$

c) Linjen genom D och E har riktn. vektor $\overrightarrow{DE} = (1,-1,1) \Rightarrow$ linjens parameter ekv är $(x,y,z) = (0,1,2) + t(1,-1,1)$ Skärning med planet då $0 = 2(t) - (1-t) - 4(2+t) + 3 = -t - 6 \Leftrightarrow t = -6$ Skärningspunkt: $(0,1,2) - 6(1,-1,1) = (-6,7,-4)$

3\) a) Extremvärdena finns bland randpunkter, singulära pkter och kritiska punkter

b) $D_f = \{x > 0\}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ Så $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

x	1/2		e		10
f'		$+$	0	$-$	
f	$-2\ln 2$	↗	$1/e$	↘	$\frac{\ln 10}{10}$

$\Rightarrow \max_{[1/2,10]} f(x) = 1/e$, $\min_{[1/2,10]} f(x) = -2\ln 2$