Inledande matematik F, tmv 156, 110115

4) $f(x) = \frac{x(x^2-1+1)}{x^2-1} = x\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) = x + \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ så

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+1 = (x^2-1)^2 \Rightarrow t+1 = (t-1)^2 = t^2-2t+1 \Rightarrow t^2 = 3t \Rightarrow t=0, t=3$

$\Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$ Vi ser att $x = \pm 1$ är lodräta asymptoter och då

$f(x) - x = \frac{x}{x^2-1} \to 0$ då $x \to \pm\infty$ så är $y=x$ sned asymptot i $\pm\infty$.

Vidare är $f'(x) = 1 - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1)^2 - x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2}$

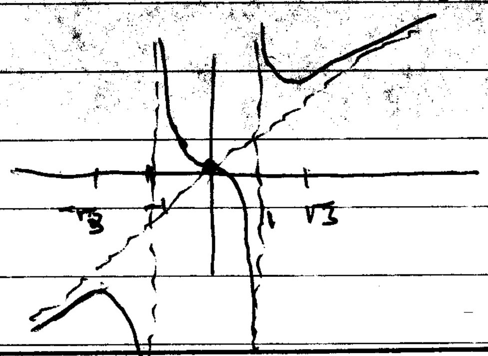
$\Rightarrow$

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
f'	$+$	0	$-$	$\}$	$-$	0	$-$	$\}$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

och $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$

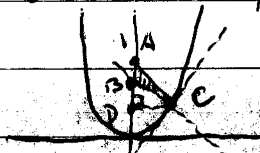
Samt $f(0)=0$



$x = \pm\sqrt{3}$ är lokala extrempunkter

5) För normalen till kurvan $y=x^2$ i punkten (x_0, x_0^2) har vi $y = -\frac{1}{2x_0}x + C$

och $x_0^2 = -\frac{1}{2} + C$ i punkten $(x_0, x_0^2) \Rightarrow C = x_0^2 + \frac{1}{2}$ ∴ normalens ekv. $y = -\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2}$



Vi har $A=(0,1)$, $C=(x_0, x_0^2)$, $B=(0, x_0^2+\frac{1}{2})$, $D=(0, x_0^2)$

Area triangel $ADC = \frac{1}{2}x_0(1-x_0^2)$ Area $BDC = \frac{1}{2}(x_0^2+\frac{1}{2}-x_0^2)x_0$

Sökt area: $\frac{1}{2}x_0(1-x_0^2) - \frac{1}{2}x_0(x_0^2+\frac{1}{2}-x_0^2) = \frac{1}{2}x_0(1-x_0^2-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x_0(\frac{1}{2}-x_0^2) \equiv g(x_0)$

$g'(x_0) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}x_0^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x_0^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ av symmetriskäl $x_0>0$

∴

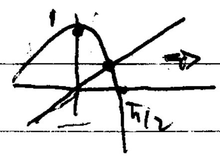
x		$1/\sqrt{6}$	
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow 1/\sqrt{6}$ maximipunkt $\Rightarrow$ Sökt maximal area $=$

$= g(1/\sqrt{6}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6\sqrt{6}}$

6) SSFSFF a) påst $\Leftrightarrow \sin 2\theta \le \frac{1}{2}$ vilket är sant b) sant enl. sats c) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ visar att falskt. d) $f' > \delta > 0 \Rightarrow$ strängt växande $\Rightarrow f^{-1}\exists \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)} < \frac{1}{1} = 1$

e)



$\Rightarrow$ endast en lösning x så, $x \in [0, \pi/2]$ f) Tag $a\, b\, c$ som enhetsvektorerna $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$ i $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$(a\times b)\cdot c = 1 \neq -1 = (a\times c)\cdot b$

7) se baksidan